

## 三角形を解く [三角形の決定条件]

**1**

H さん：三角形には3つの辺と3つの角があって、いくつかの辺や角が与えられたとき、残りの辺や角を求めることを「三角形を解く」というのよ。

T くん：ふーん。そうなんだ。そういえば、そういう問題、たくさん解いたよ。テストにも出たな～

H さん：正弦定理，余弦定理は覚えてる？

T くん：うーん。多分・・・

**問題** 次の枠を埋めてみよう。

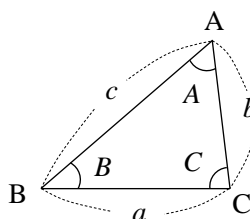
### 解答

右の図の△ABCにおいて、

$BC=a, CA=b, AB=c,$

$\angle A=A, \angle B=B, \angle C=C$

とする。



### 正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad (R \text{ は, } \triangle ABC \text{ の外接円の半径})$$

### 余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

**2**

H さん：与えられた条件によって、どの定理を用いればよいのかを考えると楽しいわね。

T くん：楽しいかな～？適当に式に値を代入して、何かが求められたらラッキー！って感じだけど。

H さん：・・・・・・・・

T くん：三角形が1通りの場合と2通りの場合があるのは何でだろう？って、思ったたよ。

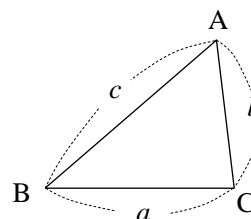
H さん：それはいいところに目を付けたわね！

**問題** 次の場合，三角形が1通りに定まるか，定まらないかを調べてみよう。

**解答**

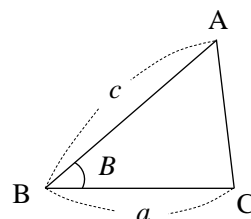
(1) 3辺が与えられたとき

1通りに定まる。



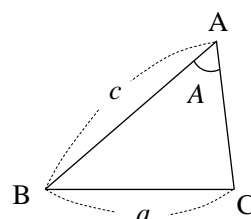
(2) 2辺とその間の角が与えられたとき

1通りに定まる。



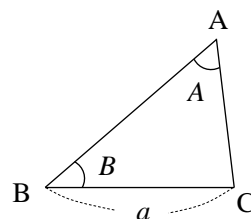
(3) 2辺とその間ではない角が与えられたとき

1通りに定まらない。



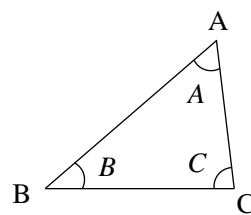
(4) 1辺と2つの角が与えられたとき

1通りに定まる。



(5) 3つの角が与えられたとき

1通りに定まらない。

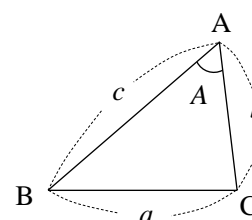


**補足** 三角形が1つに定まる条件は、三角形の合同条件と一致する。

**3**

Hさん：2の(3)について、もう少し詳しく調べてみましょう。

**問題** 2の(3)において、右の図のように  $b$  を考え、 $b$  に関する方程式を作り、その解と三角形の関係を考察してみよう。



**解答**

余弦定理により  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$   $b$  について整理すると  $b^2 - (2ccosA)b + c^2 - a^2 = 0$   
 これは  $b$  に関する 2 次方程式であるから、 $a, c, cosA$  の値によって次の場合がある。

- (i) 異なる 2 つの実数解をもつ
- (ii) ただ 1 つの実数解 (重解) をもつ
- (iii) 実数解をもたない

これらは、 $\triangle ABC$  が

- (i) 2 つに定まる
- (ii) 1 つに定まる
- (iii) 存在しない

場合と対応している。

**別の考え方**

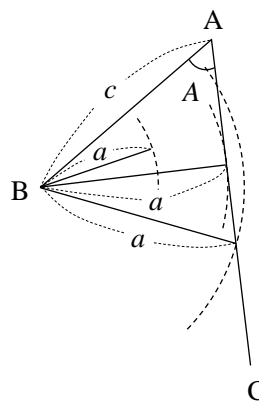
辺の長さ  $c$  と角  $A$  が固定されていると考え、  
 辺の長さ  $a$  がいろいろな値をとると考える。  
 点  $B$  を中心とし、半径  $a$  の円を考えると、  
 半直線  $AC$  と

- (i) 交点をもたない
- (ii) 接する (交点が 1 つ)
- (iii) 2 点で交わる

場合がある。これらは、 $\triangle ABC$  が

- (i) 存在しない
- (ii) 1 つに定まる
- (iii) 2 つに定まる

場合と対応している。



**コメント**

「三角形を解く」問題において、2 つの角度が分かっていたら内角の和が  $180^\circ$  であることからもう 1 つの角度も分かる。

1 つ目、2 つ目の角度を求めるとき三角方程式を解くことになるが、数学 I の知識では解けない場合がある。

例えば、右の図のような 3 辺が与えられた三角形において、余弦定理を用いることにより角が求められる。

(図には、求めた角度も書き込んでいる。)

$cos75^\circ$  の値は未習のため  $cosB$  の値は求められない。これは判断ミスではなく、ただ運が悪かったというしかない。この場合は、改めて  $cosA$  や  $cosC$  を計算し直すことになる。

「三角形を解く」問題で角度を求めるとき、三角方程式が解けない場合があることを把握しておきたい。

