2 次関数

$\boxed{1}$　**2 次関数のグラフ**

次の 2 次関数の頂点と軸を求めよ。また，(1)はグラフもかけ。

(1)　$y=-x^2+2x+1$　　　(2)　$y=x^2+ax-a$

要　点

$y=ax^2+bx+c$ の形から $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形することを「**平方完成**」といいます。

高校数学で頻繁に出てくる重要な変形です。

$y=ax^2+bx+c$

$=a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x\right)+c$　　……　x^2 の係数でくくる

$=a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{b^2}{4a^2}-\dfrac{b^2}{4a^2}\right)+c$　　……　x の係数の半分の 2 乗を加えて引く

$=a\left\{\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a^2}\right\}+c$　　……　かっこの 2 乗の式を作る

$=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a}+c$　　……　中かっこを展開すれば出来上がり

頂点の座標：$\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2}{4a}+c\right)$，　軸：直線 $x=-\dfrac{b}{2a}$

解答

(1)　$y=-x^2+2x+1$

$=-(x^2-2x)+1$

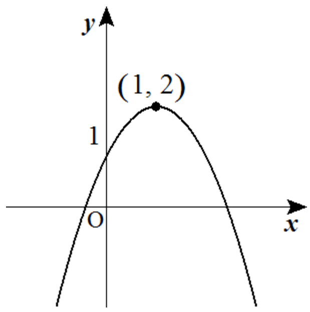
$=-(x^2-2x+1-1)+1$

$=-\{(x-1)^2-1\}+1$

$=-(x-1)^2+2$

頂点の座標：(1，2)，軸：直線 $x=1$

グラフは右の図のようになる。



「グラフをかけ」という問題のときは,『頂点』と『y 切片』を書き入れれば OK です。

(2)　$y=x^2+ax-a=(x^2+ax)-a=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}-a$

頂点の座標：$\left(-\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{a^2}{4}-a\right)$，軸：直線 $x=-\dfrac{a}{2}$

2　平行移動・対称移動

(1)　2 次関数 $y=x^2-2x+3$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に 1 だけ平行移動したグラフの 2 次関数を求めよ。

(2)　放物線 $y=-3x^2+2x+1$ は，放物線 $y=-3x^2-2x-1$ をどのように平行移動すれば得られるか。

(3)　放物線 $y=x^2-2x+3$ を，次のように移動したとき得られる放物線をグラフとする 2 次関数をそれぞれ求めよ。

①　x 軸に関して対称移動　　②　y 軸に関して対称移動　　③　原点に関して対称移動

解答

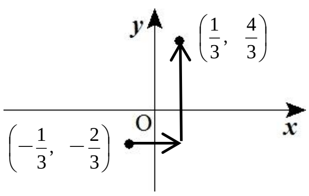
(1)　$y=x^2-2x+3=(x-1)^2-1+3=(x-1)^2+2$　　頂点：(1，2)

x 軸方向に -1，y 軸方向に 1 だけ平行移動させると，頂点の座標は(0，3)になる。

したがって　$\boldsymbol{y=x^2+3}$

(2)　$y=-3x^2-2x-1=-3\left(x^2+\dfrac{2}{3}x\right)-1=-3\left\{\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{1}{9}\right\}-1=-3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}-1$

$=-3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{2}{3}$　　頂点：$\left(-\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$



$y=-3x^2+2x+1=-3\left(x^2-\dfrac{2}{3}x\right)+1$

$=-3\left\{\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{1}{9}\right\}+1=-3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}+1=-3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{4}{3}$　　頂点：$\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$

それぞれの頂点の座標から　　**x 軸方向に $\dfrac{2}{3}$，y 軸方向に 2 平行移動すれば得られる。**

(3)

要　点

関数 $y=f(x)$のグラフを，対称移動して得られるグラフの関数は次のようになります。

・x 軸に関して対称移動　……　$y=-f(x)$

・y 軸に関して対称移動　……　$y=f(-x)$

・原点に関して対称移動　……　$y=-f(-x)$

〈注意〉2 次関数のグラフの場合，頂点に着目して求めることもできるが，対称移動によって上に凸になるか下に凸になるかにも気をつけなければいけない。

①　$y=-(x^2-2x+3)=\boldsymbol{-x^2+2x-3}$

②　$y=(-x)^2-2(-x)+3=\boldsymbol{x^2+2x+3}$

③　$y=-\{(-x)^2-2(-x)+3\}=\boldsymbol{-x^2-2x-3}$

$\boxed{3}$　**2 次関数の決定**

次の条件を満たす 2 次関数を求めよ。

(1)　頂点が(2，1)で，点(3，－1)を通る。

(2)　x 軸と 2 点(1，0)，(3，0)で交わり，y 切片が 3 であるグラフの 2 次関数。

(3)　3 点(－1，－2)，(1，6)，(2，7)を通る。

要　点

2 次関数の決定で，最も大切なことは『どの形から求めるか』です。

次の 3 パターンを覚えて，問題によって使い分けましょう。

$\boxed{\text{I}}$　頂点の座標：$(p,\ q)$，または軸：$x=p$ がわかっているとき

$y=a(x-p)^2+q$

$\boxed{\text{II}}$　x 軸との交点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ がわかっているとき

$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$

$\boxed{\text{III}}$　その他

$y=ax^2+bx+c$

解答

(1)　頂点 (2，1) がわかっているから，$\boxed{\text{I}}$を用いる。

$y=a(x-2)^2+1$

点(3，－1)を通るから $x=3$，$y=-1$ を代入する。　$-1=a+1$　これより $a=-2$

よって　$\boldsymbol{y=-2(x-2)^2+1}$

(2)　x 軸との交点 (1，0)，(3，0) がわかっているから，$\boxed{\text{II}}$を用いる。

$y=a(x-1)(x-3)$

y 切片が 3 であるから $x=0$，$y=3$ を代入すると　$3=a\cdot(-1)\cdot(-3)$　これより $a=1$

よって　$\boldsymbol{y=(x-1)(x-3)}$　（または　$\boldsymbol{y=x^2-4x+3}$）

(3)　通る 3 点がわかっているときは，$\boxed{\text{III}}$を用いて a，b，c を求める。

$y=ax^2+bx+c$ に $x=-1$，$y=-2$ と $x=1$，$y=6$ と $x=2$，$y=7$ を代入して連立方程式を作る。

$$\begin{cases} -2=a-b+c & \cdots ① \\ 6=a+b+c & \cdots ② \\ 7=4a+2b+c & \cdots ③ \end{cases}$$

②－①から　$2b=8$　よって　$b=4$

①，③に $b=4$ を代入すると

$$\begin{cases} a+c=2 \\ 4a+c=-1 \end{cases}$$

この連立方程式を解くと　$a=-1$，$c=3$

以上より　$\boldsymbol{y=-x^2+4x+3}$

$\boxed{4}$　**2 次関数の最大・最小**

(1)　関数 $y=x^2-2x-1$ $(0\leqq x\leqq 3)$ の最大値および最小値を求めよ。

(2)　関数 $y=-x^2+2ax$ $(0\leqq x\leqq 2)$ の最大値を，次の 3 つの場合に分けて求めよ。

①　$a<0$　　②　$0\leqq a\leqq 2$　　③　$2<a$

要　点

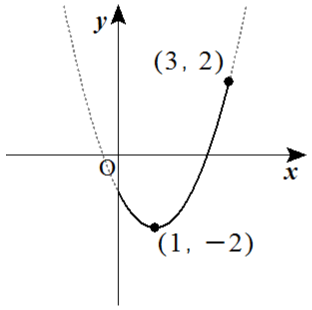
2 次関数における最大・最小を求める問題は，グラフをかき頂点に着目します。定義域に制限がある場合は端点にも着目します。
また，文字が含まれている場合は，何が決まっていて，何が動くかを考えて，グラフをかいて場合分けをします。

解答

(1)　$y=x^2-2x-1=(x-1)^2-1-1=(x-1)^2-2$

定義域が $0\leqq x\leqq 3$ であるから

右のグラフより　**$x=3$ のとき最大値 2，$x=1$ のとき最小値 -2**

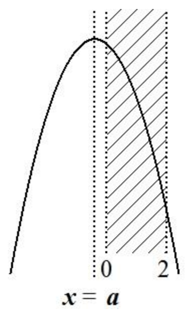


(2)　$y=-x^2+2ax=-(x^2-2ax)=-\{(x-a)^2-a^2\}$

$=-(x-a)^2+a^2$　$(0\leqq x\leqq 2)$

このグラフは上に凸であり，定義域が決まっていて，頂点が動く。

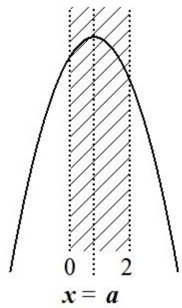
①　$a<0$ のとき



上のグラフより

最大値 0 ($x=0$)

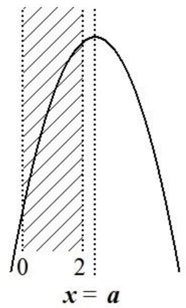
②　$0\leqq a\leqq 2$ のとき



上のグラフより

最大値 a^2 ($x=a$)

③　$2<a$ のとき



上のグラフより

最大値 $4a-4$ ($x=2$)

5　2 次関数のグラフと x 軸の位置関係

2 次関数 $y=x^2+6x+k$ のグラフと x 軸との共有点の個数は，k の値によってどのように変わるか。

要　点

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ に対して $D=b^2-4ac$ とおきます。

放物線 $y=ax^2+bx+c$ と x 軸との共有点の個数は，以下のようになります。

$$\left.\begin{array}{ll} \text{異なる 2 つの共有点をもつ} & \Leftrightarrow\ D>0 \\ \text{1 点で接する} & \Leftrightarrow\ D=0 \end{array}\right\}\ \text{共有点をもつ}\ \Leftrightarrow\ D\geqq 0$$

$$\begin{array}{ll} \text{共有点をもたない} & \Leftrightarrow\ D<0 \end{array}$$

解答

$D=6^2-4\cdot 1\cdot k=36-4k$ である。

(i)　異なる 2 つの共有点をもつ $\Leftrightarrow$ $D>0$　であるから，このとき　$36-4k>0$　すなわち　$k<9$

(ii)　1 点で接する $\Leftrightarrow$ $D=0$　であるから，このとき　$36-4k=0$　すなわち　$k=9$

(iii)　共有点をもたない　$\Leftrightarrow$　$D<0$　であるから，このとき　$36-4k<0$　すなわち　$k>9$

(i)，(ii)，(iii)より　$\begin{cases} \boldsymbol{k<9}\ \textbf{のとき}\ \ \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{k=9}\ \textbf{のとき}\ \ \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{k>9}\ \textbf{のとき}\ \ \textbf{0 個} \end{cases}$

6　2 次不等式

(1)　次の 2 次不等式を解け。

①　$x^2+x-12>0$　　②　$2\geqq x^2$　　③　$x^2+4x+4\leqq 0$　　④　$x^2-2x+2<0$

(2)　連立不等式 $\begin{cases} 2x^2-7x+6\leqq 0 \\ x^2>3 \end{cases}$ を解け。

要　点

《準備》

$\boxed{\text{式の整理}}$

与えられた式を

（x^2 の係数がプラスの 2 次式）（不等号＜，≦，＞，≧のいずれか）0

と整理します。（例：$-x^2<x+2$　$\Rightarrow$　$x^2+x+2>0$）

$\boxed{\text{2 次不等式の解}}$

$y=$（2 次式）のグラフから，2 次不等式の解は

$y>0$（$\geqq 0$）のとき，<u>x 軸の上側</u>，$y<0$（$\leqq 0$）のとき，<u>x 軸の下側</u>

である x の範囲となります。

《パターン別 2 次不等式の解法》

整理した 2 次不等式の，不等号を等号に置き換えた 2 次方程式を $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$ とします。

整理した 2 次不等式から，2 次関数 $y=$（左辺の 2 次式）のグラフを考えます。このグラフと x 軸との共有点の個数によってパターンに分かれるので，覚えていきましょう。

● **パターン１**　x 軸との共有点が 2 個のとき

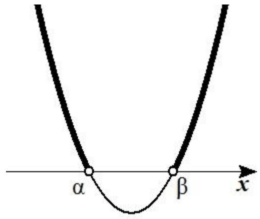
2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を α，β $(\alpha<\beta)$ とする。

(i)　$ax^2+bx+c>0$ $(\geqq 0)$ のとき

x 軸の上側の部分（右の図の太線部分）が

2 次不等式の解となる。

したがって　$\boldsymbol{x<\alpha,\ \beta<x}$　$(\boldsymbol{x\leqq\alpha,\ \beta\leqq x})$

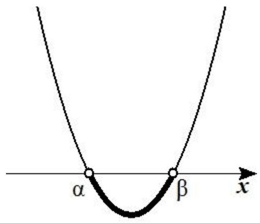


(ii)　$ax^2+bx+c<0$ $(\leqq 0)$ のとき

x 軸の下側の部分（右の図の太線部分）が

2 次不等式の解となる。

したがって　$\boldsymbol{\alpha<x<\beta}$　$(\boldsymbol{\alpha\leqq x\leqq\beta})$



● **パターン２**　x 軸との共有点が 1 個のとき

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の重解を γ とする。

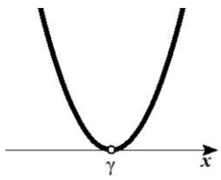
このパターンでは，＜と≦，＞と≧で不等式の解がちがってくるため，注意が必要である。

(i)　$ax^2+bx+c>0$ のとき

$y>0$ は，x 軸を含まない x 軸の上側なので

不等式の解は　**γ 以外のすべての実数**

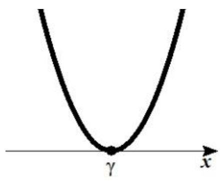
これは，$\boldsymbol{x<\gamma,\ \gamma<x}$　と書いてもよい。



(ii)　$ax^2+bx+c\geqq 0$ のとき

$y\geqq 0$ は，x 軸を含む x 軸の上側なので

不等式の解は　**すべての実数**

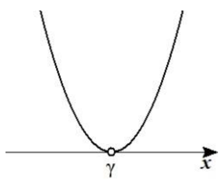


(iii)　$ax^2+bx+c<0$ のとき

$y<0$ は，x 軸を含まない x 軸の下側であるが，

右の図から，その部分にグラフはない。

したがって　**解はない**

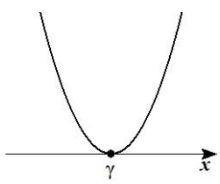


(iv)　$ax^2+bx+c\leqq 0$ のとき

$y\leqq 0$ は，x 軸を含む x 軸の下側なので，

唯一接点だけが条件を満たす。

したがって　$\boldsymbol{x=\gamma}$

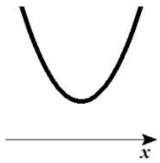


● **パターン３**　x 軸との共有点が 0 個のとき

2 次関数は右の図のようなグラフになる。

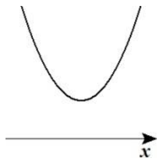
(i)　$ax^2+bx+c>0\ (\geqq 0)$ のとき

　不等式の解は　**すべての実数**



(ii)　$ax^2+bx+c<0\ (\leqq 0)$ のとき

　この不等式に　**解はない**



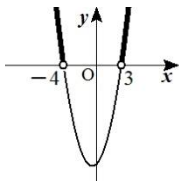
解答

(1)　①　$x^2+x-12>0$

　$x^2+x-12=0$ の解は，$x^2+x-12=(x+4)(x-3)=0$ より

　　$x=-4,\ 3$

　したがって不等式の解は，右の図より　$\boldsymbol{x<-4,\ 3<x}$

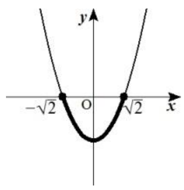


②　$2\geqq x^2$　⇒　$x^2-2\leqq 0$

　$x^2-2=0$ の解は，$x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$ より

　　$x=\pm\sqrt{2}$

　したがって不等式の解は，右の図より　$\boldsymbol{-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2}}$

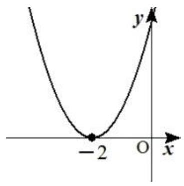


③　$x^2+4x+4\leqq 0$

　$x^2+4x+4=0$ の解は，$x^2+4x+4=(x+2)^2=0$ より

　　$x=-2$

　したがって不等式の解は，右の図より　$\boldsymbol{x=-2}$

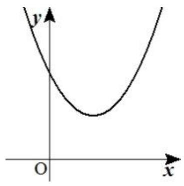


④　$x^2-2x+2<0$

　2 次関数 $y=x^2-2x+2$ のグラフは

　　$D=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 2=4-8=-4<0$

　より，x 軸と共有点をもたない（右図参照）。したがって　**解はない**



(2)　この連立不等式は，2 つの不等式が同時に成り立っている状況を表しているので，その解はそれぞれの不等式の解の共通部分になる。共通部分を求めるとき，数直線を利用すると求めやすくなる。

・$2x^2-7x+6\leqq 0$

　$2x^2-7x+6=0$ の解は，$2x^2-7x+6=(x-2)(2x-3)=0$ より　$x=\dfrac{3}{2},\ 2$

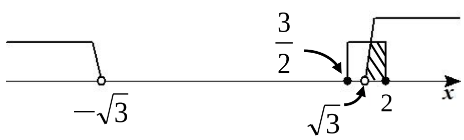
　したがって不等式の解は　$\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq 2$

・$x^2>3$　⇒　$x^2-3>0$

　$x^2-3=0$ の解は，$x^2-3=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$ より　$x=\pm\sqrt{3}$

　したがって不等式の解は　$x<-\sqrt{3},\ \sqrt{3}<x$

右の数直線より，連立不等式の解は　$\boldsymbol{\sqrt{3}<x\leqq 2}$



$\boxed{7}$ **放物線と x 軸との共有点**

2 次関数 $y=x^2+mx+m+8$ のグラフが次の条件を満たすように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(1)　x 軸の正の部分で異なる 2 つの共有点をもつ。

(2)　x 軸の負の部分で異なる 2 つの共有点をもつ。

(3)　x 軸の正の部分と負の部分で共有点をもつ。

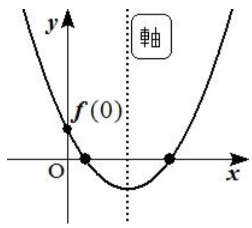
要　点

2 次関数 $y=ax^2+bx+c\ (a>0)$のグラフに対して，$D=b^2-4ac$，$f(x)=ax^2+bx+c$ とおきます。

放物線と x 軸との共有点に関して，次のことがいえます。

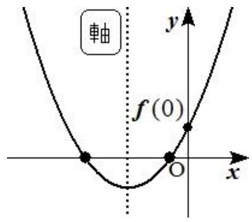
$\boxed{\text{I}}$　x 軸の正の部分で異なる 2 つの共有点をもつ

　$\Leftrightarrow$　$D>0$，(軸の位置)>0，$f(0)>0$



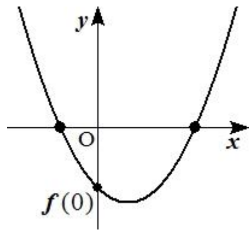
$\boxed{\text{II}}$　x 軸の負の部分で異なる 2 つの共有点をもつ

　$\Leftrightarrow$　$D>0$，(軸の位置)<0，$f(0)>0$



$\boxed{\text{III}}$　x 軸の正の部分と負の部分で共有点をもつ

　$\Leftrightarrow$　$f(0)<0$



コメント：放物線と x 軸が異なる 2 つの共有点をもつため，$D>0$ を調べる必要がありそうだが，下に凸が確定しているため，条件は $f(0)<0$ のみでよい。
また，$\boxed{\text{III}}$のとき，軸の位置は正にも負にも定まらない。

〈注意〉x^2 の係数が負の場合，y 切片の条件が$\boxed{\text{I}}$，$\boxed{\text{II}}$ は $f(0)<0$，$\boxed{\text{III}}$ は $f(0)>0$ となる。グラフをかいて確かめよう。また，x^2 の係数に変数を含むタイプの問題もあるが，正負で場合分けをして条件を満たす値の範囲を求める。x^2 の係数が 0 のときは直線となり，x 軸と 2 つの共有点をもつことはない。

解答

2 次関数 $y=x^2+mx+m+8$ のグラフに対して，$D=m^2-4(m+8)$，$f(x)=x^2+mx+m+8$ とおく。

(1)　$D>0$，(軸の位置)>0，$f(0)>0$　を満たせばよい。

(i)　$D>0$　すなわち　$m^2-4(m+8)>0$

$m^2-4(m+8)=0$ の解は，$m^2-4(m+8)=m^2-4m-32=(m+4)(m-8)=0$ より　$m=-4,\ 8$

したがって　$m<-4,\ 8<m$

(ii)　(軸の位置)＞0

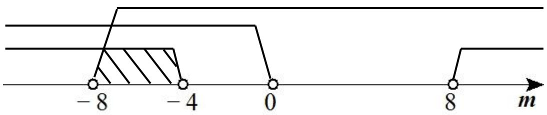
$x^2+mx+m+8=\left(x+\dfrac{m}{2}\right)^2-\dfrac{m^2}{4}+m+8$ より，軸は直線 $x=-\dfrac{m}{2}$　これより　$-\dfrac{m}{2}>0$

したがって　$m<0$

(iii)　$f(0)>0$

$f(0)=m+8$ より　$m+8>0$　したがって　$m>-8$

以上のことから，右の数直線より　$\boldsymbol{-8<m<-4}$



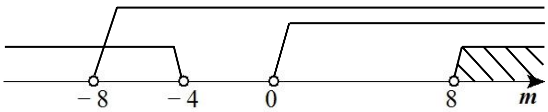
(2)　$D>0$，(軸の位置)＜0，$f(0)>0$　を満たせばよい。

(i)　$D>0$　　(1)より　$m<-4$，$8<m$

(ii)　(軸の位置)＜0　　軸は(1)より　$x=-\dfrac{m}{2}$　であるから　$-\dfrac{m}{2}<0$　したがって　$m>0$

(iii)　$f(0)>0$　　(1)より　$m>-8$

以上のことから，右の数直線より　$\boldsymbol{m>8}$



(3)　$f(0)<0$　を満たせばよい。

$m+8<0$ より　$\boldsymbol{m<-8}$

研究　**放物線と直線**

(1)　放物線 $y=-x^2+2x+3$ と直線 $y=-2x-2$ との共有点の座標を求めよ。

(2)　b を実数とする。放物線 $y=x^2-3x+1$ と直線 $y=2x+b$ が，異なる 2 点で交わるように b の値の範囲を定めよ。

要　点

直線の式を放物線の式に代入します。そうすると 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が得られるので，共有点の座標が知りたいときは解を求め，個数が知りたいときは（$D=$）b^2-4ac の符号を調べればよいです。

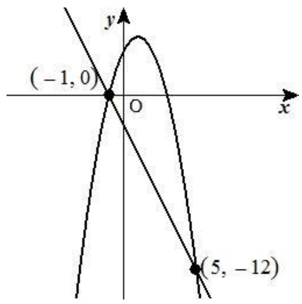
解答

(1)　$-2x-2=-x^2+2x+3$　⇒　$x^2-4x-5=0$　⇒　$(x+1)(x-5)=0$

$x=-1$ のとき　$y=-2\cdot(-1)-2=0$

$x=5$ のとき　$y=-2\cdot5-2=-12$

よって，求める共有点の座標は　$\boldsymbol{(-1,\ 0),\ (5,\ -12)}$



(2)　$2x+b=x^2-3x+1$　⇒　$x^2-5x+1-b=0$

$D=(-5)^2-4\cdot1\cdot(1-b)=25-4+4b=21+4b$

$D>0$ のとき題意を満たす。したがって　$\boldsymbol{b>-\dfrac{21}{4}}$

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ に対して，
$D=b^2-4ac$ とおく。(この D を**判別式**という。)
$D>0$　⇔　異なる 2 個の解をもつ
$D=0$　⇔　重解をもつ
$D<0$　⇔　解をもたない