

場合の数

この分野の学習にあたっては、数学 I の「集合と論理」はあらかじめ学習しているものとする。

1 集合の要素の個数

1 から 40 までの整数のうち、次の個数を求めよ。

- (1) 3 または 4 で割り切れる整数
- (2) 3 で割り切れない整数
- (3) 3 で割り切れるが 4 で割り切れない整数

要 点

和集合の要素の個数

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

特に、 $A \cap B = \phi$ のとき $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

補集合の要素の個数

$$n(\bar{A}) = n(U) - n(A) \quad (U \text{ は全体集合, } \bar{A} \text{ は } A \text{ の補集合})$$

解答

1 から 40 までの整数全体の集合を全体集合 U とし、そのうち

3 で割り切れる整数全体の集合を A

4 で割り切れる整数全体の集合を B

とする。このとき $A = \{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, \dots, 3 \cdot 13\}$

$$B = \{4 \cdot 1, 4 \cdot 2, \dots, 4 \cdot 10\}$$

$$A \cap B = \{12 \cdot 1, 12 \cdot 2, 12 \cdot 3\}$$

よって $n(A) = 13$, $n(B) = 10$, $n(A \cap B) = 3$

(1) 求める個数は $n(A \cup B)$ であるから

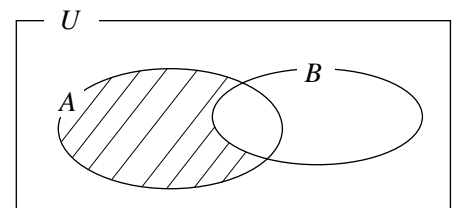
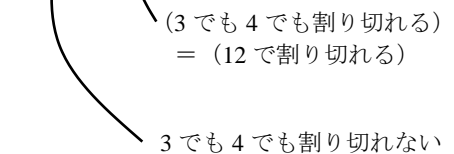
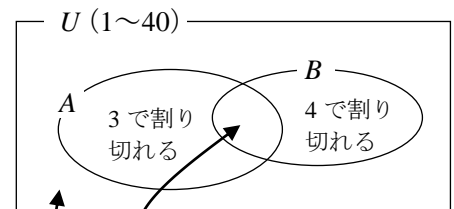
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 13 + 10 - 3 = 20 \text{ (個)}$$

(2) 求める個数は $n(\bar{A})$ であるから

$$n(\bar{A}) = n(U) - n(A) = 40 - 13 = 27 \text{ (個)}$$

(3) 求める個数は $n(A \cap \bar{B})$ である。

右の図から $n(A \cap \bar{B}) = n(A) - n(A \cap B) = 13 - 3 = 10 \text{ (個)}$



2 場合の数

次の問いに答えよ。

- (1) 表裏がわかる 3 種類のコイン a, b, c を投げて、表が出た枚数が奇数となる場合は何通りあるか。
- (2) ソファ, テーブル, カーペットがそれぞれ 3 種類, 4 種類, 2 種類ある。それぞれ 1 つずつ選ぶと、選び方は何通りあるか。

要 点

和の法則

2つの事柄 A, B は **同時には起こらない** とする。A の起こり方が a 通り, B の起こり方が b 通りあるとき, A または B の **どちらかが起こる** 場合は, **a+b 通り** ある。

積の法則

2つの事柄 A と B があって, A の起こり方が a 通りあり, その **おのおの場合について** B の起こり方が b 通りずつあるならば, A と B が **ともに起こる** 場合は, **a×b 通り** ある。

解答

(1) コインの出方を図で示すと右のようになる。

求める場合は、表が 1 枚または 3 枚出たときである。

(i) 表が 1 枚のとき

右の図から 3 通り

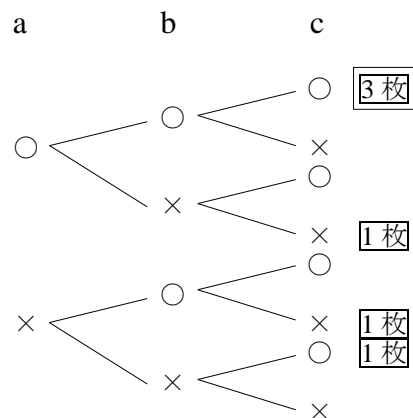
(ii) 表が 3 枚のとき

右の図から 1 通り

(i), (ii) の場合は同時に起こらないから、求める場合の数は

$$3+1=4 \text{ (通り)}$$

右の図のような、各場合を枝分かれさせてかいた図を **樹形図** という。



○は表, ×は裏が出たことを表す。

(2) 求める選び方の総数は、積の法則により

$$3 \times 4 \times 2 = 24 \text{ (通り)}$$

3 約数の個数と総和

72 の正の約数は全部で何個あるか。また、その約数の和を求めよ。

要 点

自然数 N を素因数分解すると、 $N=p^a q^b r^c$ であるとき、N の約数の個数、総和は次のようになる。

正の約数の個数 $(a+1)(b+1)(c+1)$

正の約数の総和 $(1+p+\dots+p^a)(1+q+\dots+q^b)(1+r+\dots+r^c)$

解答

$$72 = 2^3 \times 3^2$$

これから、72 の正の約数は $(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3)(3^0 + 3^1 + 3^2)$

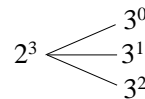
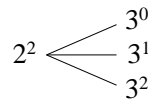
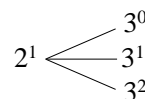
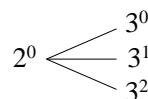
を展開した項にすべて現れる。

よって、求める正の約数の個数は

$$(3+1) \times (2+1) = 12 \text{ (個)}$$

約数の和は

$$(1+2^1+2^2+2^3)(1+3^1+3^2) = (1+2+4+8)(1+3+9) = 15 \times 13 = 195$$



4 順列

次の問いに答えよ。

- (1) 5 個の整数 1, 2, 3, 4, 5 から、異なる 3 個を取り出して 1 列に並べたときできる 3 桁の整数は全部で何個あるか。また、このうち偶数は何個あるか。
- (2) 5 個の整数 0, 1, 2, 3, 4 から、異なる 3 個を取り出して 1 列に並べたときできる 3 桁の整数は全部で何個あるか。
- (3) A, B, C, D, E の 5 人が 1 列に並ぶとき、A と B が隣り合うような並び方は全部で何通りあるか。また、A と B が両端にくるような並び方は全部で何通りあるか。

要 点

順列

異なる n 個のものから r 個取り出して 1 列に並べる順列の総数は

$${}_n P_r = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1) \quad (n \text{ から始まり } 1 \text{ ずつ小さくなる数 } r \text{ 個の積})$$

1 から n までの自然数の積を n の **階乗** といい、記号 $n!$ で表す。

すなわち $n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$

$r \leq n$ のとき、この記号を用いると ${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ 特 に ${}_n P_n = n!$

ただし、 $0! = 1$, ${}_n P_0 = 1$ と定める。

- (1) 整数が偶数となるのは、一の位が偶数のときです。
- (2) 百の位は 0 以外の数であることに注意します。
- (3) A と B が隣り合う並び方を考えるときは、A, B をまとめて 1 組と考えます。また、A と B が両端にくるような並び方を考えるときは、まず A, B を両端に並べます。

解答

(1) 5 個の整数から異なる 3 個を取って並べたときにできる 3 桁の整数は

$${}_5 P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ (個)}$$

また、このうち偶数は、一の位が 2, 4 のいずれかで 2 通り

そのおのおのに対して、百、十の位は残り 4 個から 2 個を取る順列であるから ${}_4 P_2$ 通り

よって、求める個数は $2 \times {}_4 P_2 = 2 \times 4 \times 3 = 24 \text{ (個)}$

Math-Aquarium 【例題】 場合の数

(2) 百の位は、0を除く1~4から1個取るから 4通り

そのおのおのに対して、十、一の位は、0を含めた残り4個から2個を取る順列であるから ${}_4P_2$ 通り
よって、求める個数は $4 \times {}_4P_2 = 4 \times 4 \times 3 = 48$ (個)

別解 0~4の5個の整数から3個取って並べる順列の総数は ${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ (個)

このうち、1番目の整数が0であるものは ${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$ (個)

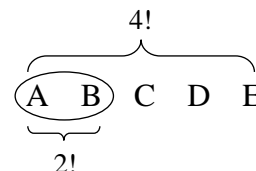
よって、求める個数は $60 - 12 = 48$ (個)

(3) A, Bをまとめて1組と考える。

A, Bの1組とC~Eの3人の並び方は 4!通り

A, Bの並び方は 2!通り

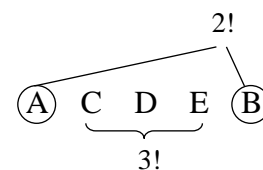
よって、求める並び方は $4! \times 2! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 = 48$ (通り)



また、A, Bが両端に並ぶ並び方は 2!通り

残り3人の並び方は 3!通り

よって、求める並び方は $2! \times 3! = 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$ (通り)



5 円順列

異なる6個のビーズがある。

(1) これらのビーズを円形に並べる方法は何通りあるか。

(2) これらのビーズに糸を通して輪を作るとき、何通りの作り方がああるか。

要 点

円順列

異なる n 個のものの円順列の総数は $\frac{{}_nP_n}{n} = (n-1)!$

じゅず順列

異なる n 個のもののじゅず順列の総数は $\frac{(n-1)!}{2}$

〈注意〉じゅず順列の総数は、円順列の総数の半分です。

解答

(1) 異なる6個のビーズを円形に並べる方法は

$$\frac{{}_6P_6}{6} = (6-1)! = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \text{ (通り)}$$

(2) ビーズに糸を通した輪は、裏返すと同じになるから

$$\frac{(6-1)!}{2} = 60 \text{ (通り)}$$

6 重複順列

- (1) 3種類の数字 1, 2, 3 を使ってできる 4桁の整数は何個あるか。ただし、同じ数字を繰り返して使ってもよい。
- (2) 集合 $\{a, b, c\}$ の部分集合の個数を求めよ。
- (3) A, B, C, D, E の 5人が 1号室, 2号室の 2つの部屋に入る方法は何通りあるか。ただし、空き部屋があってもよいものとする。

要 点

重複順列

異なる n 個のものから重複を許して、 r 個を取り出して並べる順列の総数は n^r

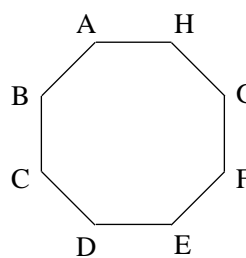
解答

- (1) 千の位, 百の位, 十の位, 一の位に使える数字は、それぞれ 1, 2, 3 の 3通り
よって、求める個数は $3^4=81$ (個)
- (2) 異なる 3つの要素のそれぞれについて、その部分集合に属するか、属さないかの 2通りがある。
よって、求める部分集合の個数は $2^3=8$ (個)
- (3) 5人が、1号室, 2号室にどちらかに入る方法は $2^5=32$ (通り)

7 組合せ

次の問いに答えよ。

- (1) 8人から3人を選ぶ選び方は何通りあるか。
- (2) 男子3人, 女子5人の計8人から、男子1人, 女子2人を選ぶ選び方は何通りあるか。
- (3) 正八角形 ABCDEFGH の 2つの頂点を選んで線分を作るとき、対角線となるものは何本できるか。



要 点

組合せ

異なる n 個のものの中から r 個を取る組合せの総数は

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ただし、 ${}_nC_0=1$ と定める。異なる n 個のものの中から r 個を取ることは、残す $n-r$ 個を決めると考えても同じであるから ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$

解答

(1) ${}_8C_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{56}$ (通り)

(2) 男子 3 人から 1 人選ぶ選び方は ${}_3C_1$ 通り

そのおのおのに対して、女子 5 人から 2 人選ぶ選び方は ${}_5C_2$ 通り

よって、求める選び方は ${}_3C_1 \times {}_5C_2 = 3 \times \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \mathbf{30}$ (通り)

(3) 8 個の頂点から 2 点を選び結んだ線分の本数は ${}_8C_2$ 本

この中で、正八角形 ABCDEFGH の 1 辺となるものは 8 本あるので、求める対角線の本数は

$${}_8C_2 - 8 = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} - 8 = \mathbf{20}$$
 (本)

8 組分け

6 人を次のように分ける方法は何通りあるか。

- (1) 3 人, 2 人, 1 人の 3 組に分ける。
- (2) 2 人ずつ, A, B, C の 3 組に分ける。
- (3) 2 人ずつ 3 組に分ける。

要 点

(2) 組に A, B, C という名前が付いているから、3 組は区別します。

(3) 3 組は同じ人数の組のため、区別できません。

6 人を a, b, c, d, e, f で表し、(3)において {a, b}, {c, d}, {e, f} の 3 組に分けるとします。

(3)では 1 通りの分け方だが、(2)ではさらに A, B, C に割り当てるため 3! 通りの分け方があります。

このことから、(2)で求めた分け方を 3! で割れば(3)の分け方が求められます。

解答

(1) 6 人から 3 人を選び、次に残った 3 人から 2 人を選ぶと、残りの 1 人は自動的に決まる。

よって、求める分け方は ${}_6C_3 \times {}_3C_2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = \mathbf{60}$ (通り)

(2) A に入れる 2 人を選ぶ選び方は ${}_6C_2$ 通り

残りの 4 人から B に入れる 2 人を選ぶ選び方は ${}_4C_2$ 通り

C には残りの 2 人が入るから、求める分け方は

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \mathbf{90}$$
 (通り)

(3) (2)で、A, B, C の区別をなくすと、同じものが 3! 通り

ずつできるから、求める分け方は

$$\frac{{}_6C_2 \times {}_4C_2}{3!} = \frac{90}{6} = \mathbf{15}$$
 (通り)

A	B	C
{a, b}	{c, d}	{e, f}
{a, b}	{e, f}	{c, d}
{c, d}	{a, b}	{e, f}
{c, d}	{e, f}	{a, b}
{e, f}	{a, b}	{c, d}
{e, f}	{c, d}	{a, b}

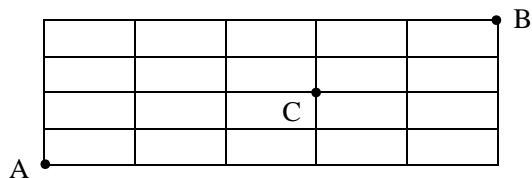
} A, B, C の区別をなくすと同じ

9 同じものを含む順列

次の問いに答えよ。

- (1) 6個の文字 a, a, a, b, c, c のすべてを1列に並べる方法は何通りあるか。
 (2) 右の図において、A 地点から B 地点まで最短の道を行くとき、次の場合は何通りの道順があるか。

- ① 全部の道順
 ② C 地点を通る道順



要 点

同じものを含む順列

n 個のものの中で、 p 個は同じもの、 q 個は別の同じもの、 r 個はまた別の同じもの、……であるとき、これら n 個のもの全部を1列に並べる順列の総数は

$${}_n C_p \times {}_{n-p} C_q \times {}_{n-p-q} C_r \times \dots \quad \text{すなわち} \quad \frac{n!}{p!q!r!\dots} \quad \text{ただし} \quad p+q+r+\dots=n$$

解答

- (1) a が3個、b が1個、c が2個であるから

$$\frac{6!}{3!1!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 60 \text{ (通り)}$$

別解 ${}_6 C_3 \times {}_3 C_1 \times {}_2 C_2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{3}{1} \times \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 60 \text{ (通り)}$

- (2) ① 上へ1区画進むことを↑、右へ1区画進むことを→で表す。最短の道順は、↑4個、→5個の順列で表されるから

$$\frac{9!}{4!5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126 \text{ (通り)}$$

- ② A 地点から C 地点までの最短の道順は↑2個、→3個の順列で表されるから $\frac{5!}{2!3!}$ 通り

- C 地点から B 地点までの最短の道順は↑2個、→2個の順列で表されるから $\frac{4!}{2!2!}$ 通り

よって、求める道順は

$$\frac{5!}{2!3!} \times \frac{4!}{2!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \times 6 = 60 \text{ (通り)}$$

10 重複組合せ

次の問いに答えよ。

- (1) A, B, C, D の 4 種類の商品が店頭にたくさんある。6 個の商品を買うとき、何通りの買い方があるか。ただし、買わない商品があってもよいものとする。
- (2) $x+y+z=7$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ を満たす整数の組 (x, y, z) は、全部で何組あるか。

要 点

重複組合せ

異なる n 個のものから重複を許して、 r 個を取る組合せの総数は

$${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r \quad (n < r \text{ であってもよい})$$

解答

- (1) 異なる 4 種類のものから、重複を許して 6 個取る組合せの総数であるから

$${}_4H_6 = {}_{4+6-1}C_6 = {}_9C_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{84 \text{ (通り)}}$$

別解 6 個の○と 3 つの仕切り | を考え、例えば

○○ | ○ | ○ | ○○ は A : 2 個, B : 1 個, C : 1 個, D : 2 個

| | ○○○○ | ○○ は A : 0 個, B : 0 個, C : 4 個, D : 2 個

を表す、と考えればよいから、求める場合の数は

$${}_9C_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84 \text{ (通り)}$$

- (2) 異なる 3 種類のものから、重複を許して 7 個取る組合せの総数であるから

$${}_3H_7 = {}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_2 = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = \mathbf{36 \text{ (組)}}$$

別解 7 個の○と 2 つの仕切り | を考え、例えば○○ | ○○○ | ○○ は $(x, y, z) = (2, 3, 2)$ | ○○○○ | ○○○ は $(x, y, z) = (0, 4, 3)$ を表す、と考えればよいから、求める (x, y, z) の組の総数は

$${}_9C_2 = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36 \text{ (組)}$$

研究 1 隣り合わない並び方

A, B, C, D, E の 5 人が 1 列に並ぶとき, A, B の 2 人が隣り合わないような並び方は全部で何通りあるか。

解答

まず, C, D, E の 3 人を並べる。

次に, その間または両端である ①~④ に A, B を並べれば, A, B が隣り合うことはない。

① ② ③ ④

C, D, E の 3 人の並び方は $3!$ 通り

①~④ に A, B が並ぶ並び方は $4P_2$ 通り

よって, 求める並び方は $3! \times 4P_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 4 \cdot 3 = 72$ (通り)

〈注意〉 2 人が隣り合わないような並び方は, 2 人が隣り合う並び方をすべての並び方から引いても求めることができます。すなわち $5! - (4! \times 2!) = 120 - (24 \times 2) = 72$ (通り)

ただし, 3 人が隣り合わないような並び方を考えるとき, 3 人が隣り合う並び方をすべての並び方から引いても, 2 人だけ隣り合う場合が残るので求めることができません。

3 人以上が隣り合わないような並び方を求めるときは, 研究 1 の解答のような, 先に隣り合わない人以外の人を並べて, 後から間または両端に入れる考え方が有効です。

研究 2 順序が定まった順列

A, Q, U, A, R, I, U, M の 8 文字を横 1 列に並べるとき, Q, R, M がこの順に並ぶ並び方は何通りあるか。

解答

Q, R, M を同じもの, すなわち, 3 個の□とみる。

□ : 3 個, A : 2 個, U : 2 個, I : 1 個を横 1 列に並べ, 3 個の□に左から Q, R, M を入れればよい。

よって, 求める並び方は

$$\frac{8!}{3!2!2!1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}$$

$$= 1680 \text{ (通り)}$$

例えば

□ A U □ I □ U A

という並び方は, 左から

Q, R, M を入れて

Q A U R I M U A

という並び方と対応する。