微分と積分

$\boxed{1}$　**平均変化率と微分係数**

関数 $f(x)=x^2-4x$ について，次のものを求めよ。

(1)　x の値が 1 から 4 まで変化するときの平均変化率

(2)　$x=3$ における微分係数

(3)　曲線 $y=f(x)$ 上の点 A$(t,\ f(t))$ における接線の傾きが 1 になるときの，t の値

要　点

平均変化率

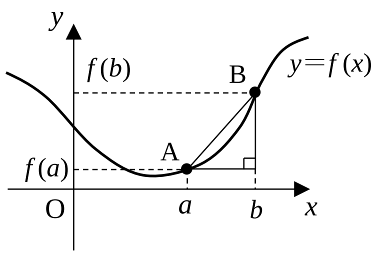
関数 $y=f(x)$ において，x の値が a から b まで変化するとき，

x の変化量は $b-a$，y の変化量は $f(b)-f(a)$であり，

このときの変化の割合　$\boldsymbol{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}$　……①

を，x の値が a から b まで変化するときの関数 $f(x)$の **平均変化率**

という。右の図において，平均変化率①は直線 AB の傾きを表す。



極限値

関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に

近づくことを　$\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x)=\alpha}$　または　$\boldsymbol{x\to a}$ **のとき** $\boldsymbol{f(x)\to\alpha}$

と表し，α を x が a に近づくときの $f(x)$ の **極限値** という。

微分係数

関数 $f(x)$ の平均変化率①において，a の値を定め，b を a に限りなく近づけるとき，①がある一定の値 α に限りなく近づく場合，α を関数 $f(x)$ の $x=a$ における **微分係数** といい，$\boldsymbol{f'(a)}$ で表す。

平均変化率①において，$b-a=h$ とおくと，$b=a+h$ であるから，①は $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ と表される。

ここで，$b\longrightarrow a$ のとき $h\longrightarrow 0$ である。以上から，関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は

$$\boldsymbol{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

微分係数 $\boldsymbol{f'(a)}$ は，曲線 $\boldsymbol{y=f(x)}$ 上の点$\boldsymbol{(a,\ f(a))}$ における接線の傾きである。

解答

(1)　求める平均変化率は　$\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=\dfrac{(4^2-4\cdot 4)-(1^2-4\cdot 1)}{4-1}=\mathbf{1}$

(2)　求める微分係数は　$f'(3)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\{(3+h)^2-4(3+h)\}-(3^2-4\cdot 3)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{9+6h+h^2-12-4h-9+12}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2+h)=\mathbf{2}$$

(3) $f'(t)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\{(t+h)^2-4(t+h)\}-(t^2-4t)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{t^2+2ht+h^2-4t-4h-t^2+4t}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{2ht+h^2-4h}{h}=\lim_{h\to 0}(2t+h-4)=2t-4$

点 A における接線の傾きが 1 であるから　$f'(t)=1$　　よって　$2t-4=1$　　したがって　$\boldsymbol{t=\dfrac{5}{2}}$

$\boxed{2}$　**導関数の定義**

関数 $f(x)=x^2-x$ を，定義に従って微分せよ。

要　点

導関数の定義

関数$f(x)$ の導関数$f'(x)$ は　$\boldsymbol{f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}}$

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$を x について **微分する** という。

解答

$\boldsymbol{f'(x)}=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\{(x+h)^2-(x+h)\}-(x^2-x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\dfrac{x^2+2hx+h^2-x-h-x^2+x}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{2hx+h^2-h}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h-1)=\boldsymbol{2x-1}$

$\boxed{3}$　**導関数の計算**

次の関数を微分せよ。

(1)　$y=x^3+2x^2-5x-3$　　　　(2)　$y=(x-1)(x+2)^2$

要　点

x^n と定数の微分

・正の整数 n について　$\boldsymbol{(x^n)'=nx^{n-1}}$

・定数 c について　　$\boldsymbol{(c)'=0}$

導関数の性質

k，l を定数とする。

・$y=kf(x)$ならば　$y'=kf'(x)$

・$y=f(x)+g(x)$ならば　$y'=f'(x)+g'(x)$

**　$y=f(x)-g(x)$ならば　$y'=f'(x)-g'(x)$**

・$y=kf(x)+lg(x)$ならば　$y'=kf'(x)+lg'(x)$

解答

(1)　$y'=(x^3+2x^2-5x-3)'=(x^3)'+2(x^2)'-5(x)'-(3)'=3x^2+2\cdot 2x-5\cdot 1-0=\mathbf{3x^2+4x-5}$

(2)　$y=(x-1)(x+2)^2=(x-1)(x^2+4x+4)=x^3+4x^2+4x-x^2-4x-4=x^3+3x^2-4$ であるから

$y'=(x^3+3x^2-4)'=(x^3)'+3(x^2)'-(4)'=3x^2+3\cdot 2x-0=\mathbf{3x^2+6x}$

4　**導関数と微分係数，瞬間の速さ**

(1)　次の関数 $f(x)$について，$x=-2$ における微分係数を求めよ。

①　$f(x)=x^2+x$　　②　$f(x)=-x^3+2x^2+3$

(2)　地上から真上に初速度 19.6 m/s で投げ上げられた物体の t 秒後の高さ $h(t)$ m は，$h(t)=19.6t-4.9t^2$ で表される。次のものを求めよ。

①　1 秒後から 2 秒後までの平均の速さ

②　2 秒後の瞬間の速さ

要　点

微分係数

$x=a$ における関数 $f(x)$の微分係数 $f'(a)$は，導関数 $f'(x)$に $x=a$ を代入して求めることができる。

瞬間の速さ

直線上を動く物体について，関数 $y=f(t)$が時刻 t における物体の位置 y を表しているとする。

このとき，

・時刻 $t=a$ から $t=a+h$ までの物体の平均の速さは，平均変化率 $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ に等しい。

・時刻 a での瞬間の速さは，微分係数 $f'(a)$に等しい。

解答

(1)　①　$f'(x)=2x+1$

よって　$f'(-2)=2\cdot(-2)+1=\mathbf{-3}$

②　$f'(x)=-3x^2+2\cdot 2x=-3x^2+4x$

よって　$f'(-2)=-3\cdot(-2)^2+4\cdot(-2)=\mathbf{-20}$

(2)　①　求める平均の速さは

$$\frac{19.6\cdot 2-4.9\cdot 2^2-(19.6\cdot 1-4.9\cdot 1^2)}{2-1}=\mathbf{4.9\ (m/s)}$$

②　$h'(t)=19.6-4.9\cdot 2t=19.6-9.8t$

よって，求める瞬間の速さは　$h'(2)=19.6-9.8\cdot 2=\mathbf{0\ (m/s)}$

$\boxed{5}$　**接線の方程式**

(1)　曲線 $y=x^3-4x$ 上の点(2，0)における接線の方程式を求めよ。

(2)　点(2，-2)から曲線 $y=x^2-x$ に引いた接線の方程式を求めよ。

要　点

接線の方程式

曲線 $y=f(x)$上の点$(a,\ f(a))$における接線の方程式は

$$\boldsymbol{y-f(a)=f'(a)(x-a)}$$

曲線 $y=f(x)$上にない点$(s,\ t)$からその曲線に引いた接線の方程式を求めるときは，接点の座標を曲線上の点$(a,\ f(a))$と仮において，その点$(a,\ f(a))$における接線が点$(s,\ t)$を通ると考えて，a の値を求める。

解答

(1)　$f(x)=x^3-4x$ とすると　$f'(x)=3x^2-4$

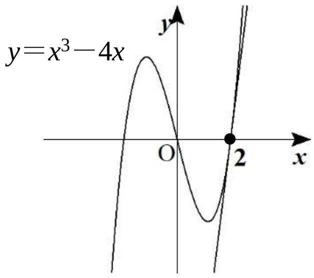
点(2，0)における接線の傾きは

$f'(2)=3\cdot2^2-4=8$

よって，求める接線の方程式は

$y-0=8(x-2)$

すなわち　$\boldsymbol{y=8x-16}$



(2)　$f(x)=x^2-x$ とすると　$f'(x)=2x-1$

接点の座標を$(a,\ a^2-a)$とおくと，その点における

接線の傾きは　$f'(a)=2a-1$

よって，この接線の方程式は

$y-(a^2-a)=(2a-1)(x-a)$

すなわち　$y=(2a-1)x-a^2$　　……①

直線①が点(2，-2)を通るから　$-2=(2a-1)\cdot2-a^2$

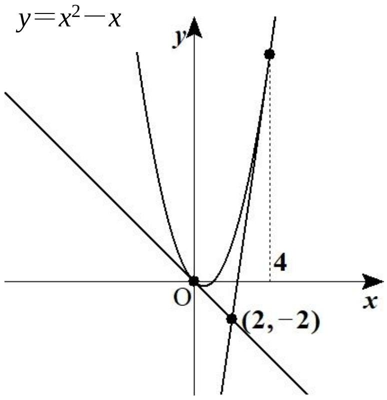
整理すると　$a(a-4)=0$

これを解くと　$a=0$，4

$a=0$ のとき，①は　$y=-x$

$a=4$ のとき，①は　$y=7x-16$

以上から，求める接線の方程式は　$\boldsymbol{y=-x,\ y=7x-16}$



$\boxed{6}$　**関数の増減，極値，グラフ**

(1)　関数 $y=x^3-2x^2-4x+1$ の増減を調べよ。

(2)　次の関数の極値を調べて，グラフをかけ。

①　$y=-x^3+3x^2+9x$　　　②　$y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+4x-1$

要　点

区間

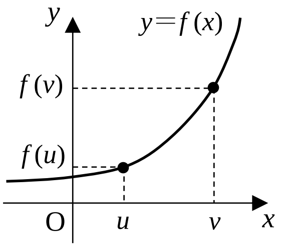
実数 a，b に対して，不等式 $a \leqq x \leqq b$ や $x > a$ などを満たす実数 x の値の範囲全体を **区間** という。

増加・減少

関数 $f(x)$において，ある区間の任意の値 u，v について

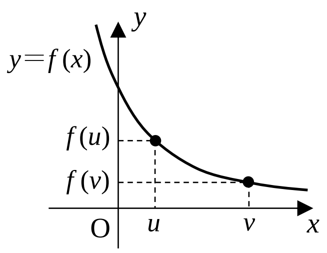
$u < v$ ならば $f(u) < f(v)$が成り立つとき，

$f(x)$はその区間で **増加する** という。



$u < v$ ならば $f(u) > f(v)$が成り立つとき，

$f(x)$はその区間で **減少する** という。

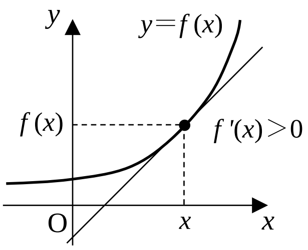


関数の増減

ある区間で

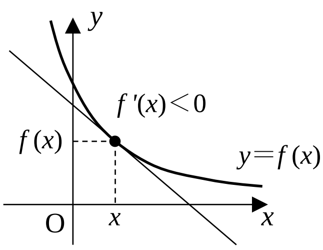
つねに $\boldsymbol{f'(x) > 0}$ ならば，関数 $f(x)$は

その区間で増加する。



つねに $\boldsymbol{f'(x) < 0}$ ならば，関数 $f(x)$は

その区間で減少する。



関数の極大値・極小値

関数 $f(x)$において，$f'(a)=0$ であり，$x=a$ の前後で

$f'(x)$ が正から負 に変わるとき，$f(x)$は $x=a$ で極大であり，**$f(a)$は極大値** である。

$f'(x)$ が負から正 に変わるとき，$f(x)$は $x=a$ で極小であり，**$f(a)$は極小値** である。

極大値と極小値をまとめて **極値** という。

解答

(1)　$y'=3x^2-4x-4$

　　$=(3x+2)(x-2)$

1	╳	-2	→	-6
3		2	→	2
				-4

$y'=0$ とすると

$x=-\dfrac{2}{3}$，2

y の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	$-\dfrac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	$\dfrac{67}{27}$	↘	-7	↗

したがって，y は

$x \leqq -\dfrac{2}{3}$，$2 \leqq x$ で増加し，

$-\dfrac{2}{3} \leqq x \leqq 2$ で減少する。

〈注意〉関数 y が増加または減少している区間を答える場合，端点を含めてよい。例えば，

本問における $x=-\dfrac{2}{3}$ のとき

$u<-\dfrac{2}{3}$ ならば $f(u)<f\left(-\dfrac{2}{3}\right)$

が成り立っているので，区間 $x \leqq -\dfrac{2}{3}$ で

増加するといえる。

増減表とは…

・$y'=0$ となる x の値の前後の y' の符号，y の増減を調べるための表である。y の行の ↗ は増加，↘ は減少を表している。

・y' の行の符号は代表的な値を代入して調べればよい。本問では，例えば

$x \leqq -\dfrac{2}{3}$ は $x=-1$ を，$-\dfrac{2}{3} \leqq x \leqq 2$ は $x=0$ を，$x \geqq 2$ は $x=3$ を y' に代入して調べればよい。

・本問では問われていないが，y の行の $\dfrac{67}{27}$，-7 はこの関数の極大値，極小値である。

(2)　①　$y'=-3x^2+6x+9=-3(x^2-2x-3)$

　　$=-3(x+1)(x-3)$

$y'=0$ とすると　$x=-1$，3

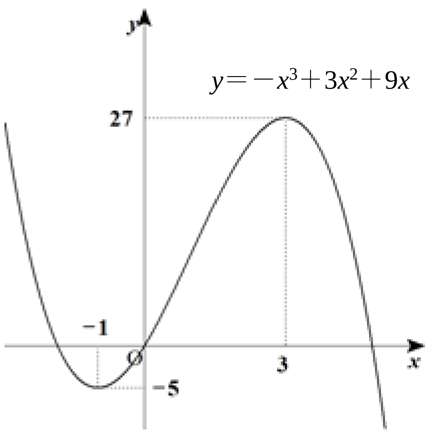
y の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	-5	↗	27	↘

よって，**$x=-1$ で極小となり，極小値は -5**

　　　　$x=3$ で極大となり，極大値は 27

したがって，グラフは右の図のようになる。



グラフをかくときは

・極値

・わかる範囲での座標軸との交点

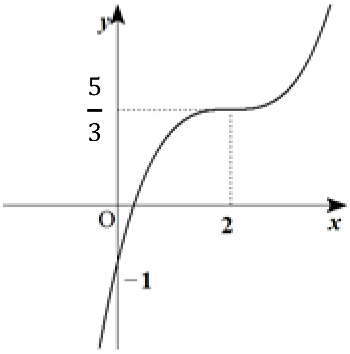
をかくようにする。

本問では y 切片が 0 なので，原点を通ることに注意する。

② $y'=x^2-4x+4$
$=(x-2)^2$
$y'=0$ とすると　$x=2$
y の増減表は右のようになる。
よって，**極値をもたない。**
グラフは次の図のようになる。

x	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	＋	0	＋
y	↗	$\frac{5}{3}$	↗

$y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x-1$



$x=2$ で $y'=0$ となるが，$x=2$ の前後で y' の符号が変わらないので，$\frac{5}{3}$ は極値ではない。
このように，関数 $y=f(x)$において，
$f(x)$が $x=a$ で極値をもつ ⟹ $f'(a)=0$
は成り立つが，**逆は必ずしも成り立たない。**
$f'(x)=0$ となる x の値を調べ，その前後における $f'(x)$の符号から極大･極小となるかどうか判断する必要がある。

7　極値の条件からの 3 次関数の決定

3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2-3x-1$ が $x=-1$ で極大となり，$x=3$ で極小となるとき，定数 a，b の値を求めよ。

要　点

$f(x)$が $x=\alpha$ で極値をとる ⟹ $f'(\alpha)=0$
は成り立つが，**逆は必ずしも成り立たない。**
本問では，$x=-1$，3 で極値をとるので　$f'(-1)=0$,　$f'(3)=0$
であるが，これだけでは問題文にあるように $x=-1$ で極大となり，$x=3$ で極小となるかどうかはわからない。このことから，増減表を作り題意を満たすことを確かめる必要がある。

解答

$f'(x)=3ax^2+2bx-3$　　　$x=-1$，$x=3$ で極値をとるから　$f'(-1)=0$,　$f'(3)=0$

よって　$\begin{cases}3a-2b-3=0\\27a+6b-3=0\end{cases}$　　これを解いて　$a=\frac{1}{3}$，$b=-1$

このとき　$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x-1$，$f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$ とすると，$x=-1$，3 であるから，増減表は右のようになる。
$f(x)$は $x=-1$ で極大，$x=3$ で極小となり，題意を満たす。

したがって　$\boldsymbol{a=\frac{1}{3}}$，$\boldsymbol{b=-1}$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	＋	0	−	0	＋
$f(x)$	↗	$\frac{2}{3}$	↘	-10	↗

$\boxed{8}$ **3 次関数が極値をもつ条件，もたない条件**

(1)　関数 $f(x)=x^3+ax^2+ax$ が極値をもつとき，定数 a のとり得る値の範囲を求めよ。

(2)　関数 $f(x)=-x^3+3ax^2+ax$ が極値をもたないような定数 a の値の範囲を求めよ。

要　点

3 次関数 $f(x)$ が極値をもつ

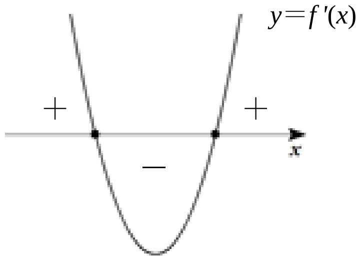
$\Leftrightarrow$ $f'(x)$ の符号が変わる

$\Leftrightarrow$ $f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつ

$\Leftrightarrow$ **$f'(x)=0$ の判別式を D とすると　$D>0$**

〈注意〉3 次関数が極値をもつときは，極大値と極小値を

　1 つずつもつ。



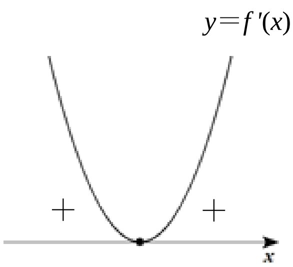
3 次関数 $f(x)$ が極値をもたない

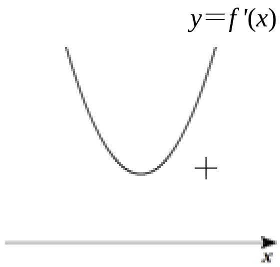
$\Leftrightarrow$ $f'(x)$ の符号が変わらない

$\Leftrightarrow$ $f'(x)=0$ が 1 つだけ実数解をもつ，

　または実数解をもたない

$\Leftrightarrow$ **$f'(x)=0$ の判別式を D とすると　$D\leqq 0$**





解答

(1)　$f'(x)=3x^2+2ax+a$

$f(x)$ が極値をもつための条件は，$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことである。

$f'(x)=0$ の判別式を D とすると　$D=(2a)^2-4\cdot 3\cdot a=4a(a-3)$

よって，$D>0$ となるのは　$\boldsymbol{a<0,\ 3<a}$

(2)　$f'(x)=-3x^2+6ax+a$

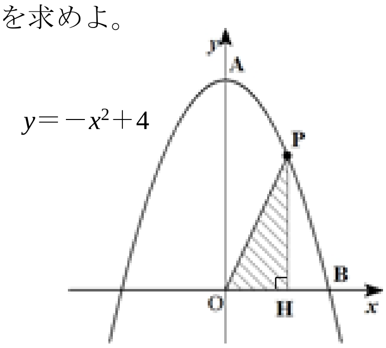
$f(x)$ が極値をもたないための条件は，$f'(x)=0$ が 1 つだけ実数解をもつ，または実数解をもたないことである。$f'(x)=0$ の判別式を D とすると　$D=(6a)^2-4\cdot(-3)\cdot a=12a(3a+1)$

よって，$D\leqq 0$ となるのは　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq 0}$

$\boxed{9}$ **3 次関数の最大・最小**

(1)　関数 $y=2x^3-x^2-4x-1$ の，区間 $-1\leqq x\leqq 2$ における最大値と最小値を求めよ。

(2)　放物線 $y=-x^2+4$ と y 軸との交点を A，x 軸の正の部分との交点を B とする。点 P が，放物線 $y=-x^2+4$ の第 1 象限の部分である点 A から B へ動き，点 P から x 軸に引いた垂線を PH とするとき，三角形 OPH の面積 S の最大値を求めよ。



要　点

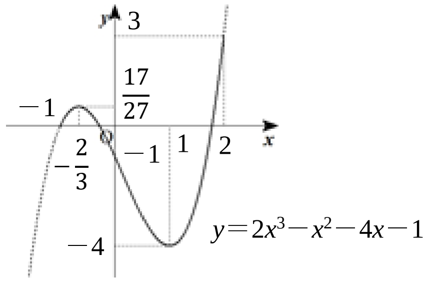
増減表を作り，極値および端点に着目して最大値，最小値を求める。
極大値，極小値が，必ずしも最大値，最小値ではないことに注意する。

解答

(1)　$y'=6x^2-2x-4=2(3x^2-x-2)$
$=2(x-1)(3x+2)$

1	╳	-1	→	-3
3		2	→	2
				-1

$y'=0$ とすると　$x=1,\ -\dfrac{2}{3}$



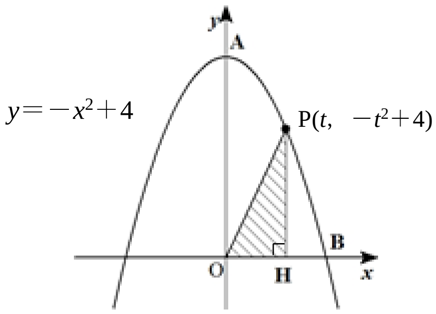
y の増減表は右のようになる。

よって，**$x=2$ で最大値 3**
$x=1$ で最小値－4

をとる。

x	-1	…	$-\dfrac{2}{3}$	…	1	…	2
y'		＋	0	－	0	＋	
y	0	↗	$\dfrac{17}{27}$	↘	-4	↗	3

(2)　点 P の座標を$(t,\ -t^2+4)$とおくと，$0 \leqq t \leqq 2$ である。



$$S=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{OH}\cdot \mathrm{PH}=\frac{1}{2}\cdot t\cdot(-t^2+4)=-\frac{1}{2}t^3+2t$$

$$S'=-\frac{3}{2}t^2+2=-\frac{3}{2}\left(t^2-\frac{4}{3}\right)$$

$0 \leqq t \leqq 2$ において，$S'=0$ となるのは

$$t=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

S の増減表は右のようになる。

よって，**$t=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ で最大値$\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$**

をとる。

t	0	…	$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$	…	2
S'		＋	0	－	
S	0	↗	$\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$	↘	0

１０　**3 次方程式の実数解の個数**

3 次方程式 $x^3+3x^2-a=0$ が異なる 3 個の実数解をもつとき，実数 a のとり得る値の範囲を求めよ。

要　点

方程式 $f(x)=g(x)$の実数解は，$y=f(x)$，$y=g(x)$のグラフの共有点の x 座標である。
本問では，曲線 $y=x^3+3x^2$ と直線 $y=a$ の共有点の個数に着目する。

解答

方程式を変形すると　$x^3+3x^2=a$　……①

ここで　$\begin{cases} y=x^3+3x^2 & \cdots\cdots② \\ y=a & \cdots\cdots③ \end{cases}$

とおくと，方程式①の異なる実数解の個数は，②と③のグラフの共有点の個数に一致する。

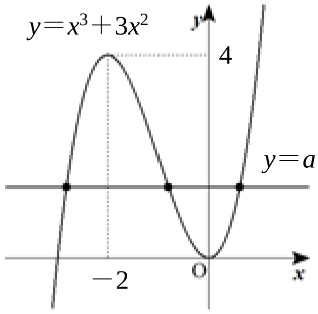
$y=x^3+3x^2$ において

$y'=3x^2+6x=3x(x+2)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ -2$

増減表とグラフは右のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	4	↘	0	↗



求める a の値の範囲は，$y=x^3+3x^2$ のグラフと直線 $y=a$ が3個の共有点をもつ範囲であるから　$\mathbf{0<a<4}$

別解　方程式 $f(x)=0$ の実数解は，$y=f(x)$のグラフと x 軸の共有点の x 座標である。
極値の符号から，題意を満たす a の値の範囲を求めることもできる。

$y=x^3+3x^2-a$ とおくと

$y'=3x^2+6x=3x(x+2)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ -2$

y の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	$4-a$	↘	$-a$	↗

極値と x 軸の位置関係から

$\begin{cases} 4-a>0 \\ -a<0 \end{cases}$

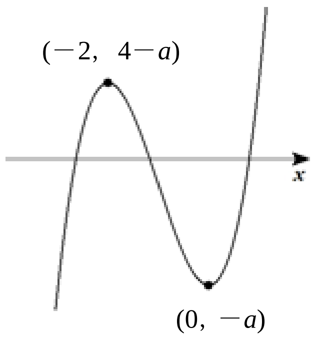
であれば題意を満たす。

よって　$0<a<4$

〈注意〉2つの極値の y 座標が異符号であればよいので

$(4-a)\cdot(-a)<0$

としてもよい。



１１　不等式の証明

$x\geqq 0$ のとき，不等式 $x^2(x-1)\geqq 4(2x-3)$が成り立つことを証明せよ。

要　点

・まず，不等式を $f(x)\geqq 0$ と変形する。

・関数 $y=f(x)$の与えられた区間における最小値 m を求める。

与えられた区間において，$f(x)\geqq m$ であるから，$m\geqq 0$ であることを示せばよい。

証明

$f(x)=x^2(x-1)-4(2x-3)=x^3-x^2-8x+12$ とおく。

$f'(x)=3x^2-2x-8$

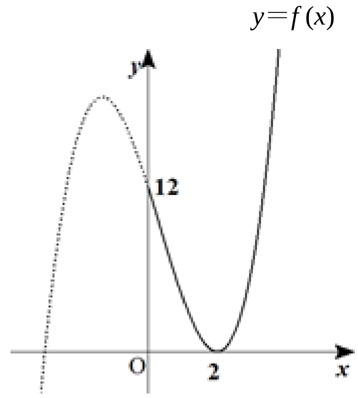
$\quad =(x-2)(3x+4)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -2 & \to & -6 \\ 3 & & 4 & \to & 4 \\ \hline & & & & -2 \end{array}$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=2,\ -\dfrac{4}{3}$

$x\geqq 0$ における y の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	12	↘	0	↗



よって，$x\geqq 0$ のとき $f(x)$は

$x=2$ で最小値 0 をとる。

したがって　$f(x)\geqq 0$

すなわち　$x^2(x-1)-4(2x-3)\geqq 0$

以上から，$x\geqq 0$ のとき　$x^2(x-1)\geqq 4(2x-3)$

１２　**不定積分**

(1)　次の不定積分を求めよ。

①　$\displaystyle\int(3x-2)\,dx$　　②　$\displaystyle\int(-3x^2+4x+1)\,dx$　　③　$\displaystyle\int(2t-1)(2t+1)\,dt$

(2)　$f'(x)=x^2+5$，$f(3)=30$ を満たす関数 $f(x)$を求めよ。

要　点

不定積分

・関数 $f(x)$に対して，微分すると $f(x)$になる関数 $F(x)$，すなわち $F'(x)=f(x)$となる $F(x)$を，$f(x)$の **原始関数** という。また，任意の定数 C について，$\{F(x)+C\}'=F'(x)=f(x)$が成り立つから，$F(x)+C$ は $f(x)$の原始関数である。

・関数 $f(x)$の原始関数の 1 つを $F(x)$とすると，$f(x)$の任意の原始関数は $F(x)+C$ の形で表すことができる。

これを $\displaystyle\int \boldsymbol{f(x)\,dx}$ で表し，$f(x)$の **不定積分** という。

このとき，$f(x)$を **被積分関数**，x を **積分変数**，定数 C を **積分定数** という。$f(x)$の不定積分を求めることを **$f(x)$を積分する** という。

$$\boldsymbol{F(x)+C}\ \underset{\text{積分}}{\overset{\text{微分}}{\rightleftarrows}}\ \boldsymbol{f(x)}$$

以上をまとめると，$F'(x)=f(x)$のとき

$$\int \boldsymbol{f(x)\,dx=F(x)+C}\qquad \text{ただし，}C\text{は積分定数}$$

〈注意〉記号 $\int$ はインテグラルと読む。

x^n の不定積分

「$\boxed{3}$ **導関数の計算**」で学習したように，n が正の整数のとき　$\boldsymbol{(x^n)'=nx^{n-1}}$　であった。

この n の代わりに $n+1$ とすると　$(x^{n+1})'=(n+1)x^n$

これから　$\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=x^n$　　これは，$n=0$ のときも成り立つ。

よって　$\displaystyle \boldsymbol{\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C}$　　ただし，nは 0 以上の整数，Cは積分定数

〈注意〉$\displaystyle\int 1\,dx$は，1 を省略して$\displaystyle\int dx$ と書く。

不定積分の性質

k，l を定数とする。

・$\displaystyle \boldsymbol{\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx}$

・$\displaystyle \boldsymbol{\int \{f(x)+g(x)\}\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx}$　　・$\displaystyle \boldsymbol{\int \{f(x)-g(x)\}\,dx=\int f(x)\,dx-\int g(x)\,dx}$

・$\displaystyle \boldsymbol{\int \{kf(x)+lg(x)\}\,dx=k\int f(x)\,dx+l\int g(x)\,dx}$

解答

C は積分定数とする。

(1)　①　$\displaystyle \int(3x-2)\,dx=3\int x\,dx-2\int dx=3\cdot\frac{1}{2}x^2-2x+C=\boldsymbol{\frac{3}{2}x^2-2x+C}$

②　$\displaystyle \int(-3x^2+4x+1)\,dx=-3\int x^2\,dx+4\int x\,dx+\int dx=-3\cdot\frac{1}{3}x^3+4\cdot\frac{1}{2}x^2+x+C$

$\displaystyle =\boldsymbol{-x^3+2x^2+x+C}$

③　積分変数が x でないが，同様に不定積分を考えることができる。

$$\int(2t-1)(2t+1)\,dt=\int(4t^2-1)\,dt=4\int t^2\,dt-\int dt=4\cdot\frac{1}{3}t^3-t+C=\boldsymbol{\frac{4}{3}t^3-t+C}$$

〈注意〉求めた不定積分を微分すると，被積分関数となる。

例えば，①なら　$\left(\dfrac{3}{2}x^2-2x+C\right)'=\dfrac{3}{2}\cdot 2x-2\cdot 1+0=3x-2$

これは求めた不定積分が正しいことの確認にもなるので，検算として利用できる。

(2)　$f(x)$はx^2+5 の原始関数であるから　$\displaystyle f(x)=\int(x^2+5)\,dx=\frac{1}{3}x^3+5x+C$

ここで　$f(3)=\dfrac{1}{3}\cdot 3^3+5\cdot 3+C=24+C$　　$f(3)=30$ であるから　$24+C=30$

よって　$C=6$　　したがって　$\boldsymbol{f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+5x+6}$

１３　定積分

(1)　次の定積分を求めよ。

①　$\displaystyle\int_0^2 (-4x+1)\,dx$　　　　②　$\displaystyle\int_{-1}^3 (t+3)(t-3)\,dt$

③　$\displaystyle 2\int_{-2}^1 (x^2+3x+3)\,dx+3\int_1^{-2}(x+1)(x+2)\,dx$

(2)　等式$f(x)=x^2+4x-\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ を満たす関数$f(x)$を求めよ。

要　点

定積分

関数 $f(x)$の原始関数の 1 つを $F(x)$とするとき，2 つの実数 a，b に対して，$F(b)-F(a)$を関数 $f(x)$の a から bまでの **定積分** といい， $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ と表す。また，$F(b)-F(a)$を$\Big[F(x)\Big]_a^b$ と表す。

定積分$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$において，$a$を **下端**，$b$を **上端** といい，この定積分を求めることを，関数$f(x)$を **a から b まで積分する** という。

以上をまとめると，$F'(x)=f(x)$のとき　$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$

〈注意〉$f(x)$の不定積分は$F(x)+C$であるが，定積分$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$の値は次のように積分定数$C$によらず定まる。

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)+C\Big]_a^b=\{F(b)+C\}-\{F(a)+C\}=F(b)-F(a)$$

〈注意〉$a≦b$ のとき，区間 $a≦x≦b$ を **積分区間** とよぶこともある。

定積分$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$の計算は，$a$，$b$の大小に関わらず行うことができる。

定積分の性質

k，l を定数とする。

・$\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$

・$\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$　　・$\displaystyle\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx$

・$\displaystyle\int_a^b \{kf(x)+lg(x)\}\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx+l\int_a^b g(x)\,dx$

また，次のような性質もある。

・$\displaystyle\int_a^a \boldsymbol{f(x)\,dx=0}$　（… 上端と下端が同じなら，定積分の値は 0）

・$\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx}$　（… 上端と下端を変換する公式）

・$\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx}$

（… $\boxed{\text{左辺から右辺}}$　上端と下端以外の値で定積分を分割する公式
$\boxed{\text{右辺から左辺}}$　一方の上端と他方の下端が同じで，被積分関数が同じ定積分を 1 つにまとめる公式）

解答

(1)　①　$\displaystyle\int_0^2(-4x+1)\,dx=\left[-4\cdot\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^2=\left[-2x^2+x\right]_0^2=(-8+2)-(0+0)=\boldsymbol{-6}$

②　積分変数がxでないが，同様に定積分を計算することができる。

$\displaystyle\int_{-1}^3(t+3)(t-3)\,dt=\int_{-1}^3(t^2-9)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-9t\right]_{-1}^3=(9-27)-\left(-\frac{1}{3}+9\right)=-\boldsymbol{\frac{80}{3}}$

③　$\displaystyle 2\int_{-2}^1(x^2+3x+3)\,dx+3\int_1^{-2}(x+1)(x+2)\,dx=\int_{-2}^1(2x^2+6x+6)\,dx-\int_{-2}^1 3(x^2+3x+2)\,dx$

$\displaystyle =\int_{-2}^1(2x^2+6x+6-3x^2-9x-6)\,dx=\int_{-2}^1(-x^2-3x)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3-3\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^1$

$\displaystyle =\left(-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{8}{3}-6\right)=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$

(2)　$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ は定数であるから，$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt=a$ とおく。

このとき　$f(x)=x^2+4x-a$

よって　$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1(t^2+4t-a)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3+4\cdot\frac{1}{2}t^2-at\right]_0^1=\frac{1}{3}+2-a=\frac{7}{3}-a$

$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt=a$であるから　$\displaystyle\frac{7}{3}-a=a$　　これを解いて　$a=\dfrac{7}{6}$

したがって　$\boldsymbol{f(x)=x^2+4x-\dfrac{7}{6}}$

$\boxed{１４}$　**定積分と微分の関係**

等式$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=x^2-4x-12$ を満たす関数$f(x)$と定数aの値をそれぞれ求めよ。

要　点

aを定数とし，関数$f(x)$の原始関数の 1 つを$F(x)$とする。このとき，定積分$\int_a^x f(t)\,dt$は$F(x)-F(a)$より

xの関数である。この関数をxについて微分すると　$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=\frac{d}{dx}\{F(x)-F(a)\}=F'(x)-0=f(x)$

したがって，次の等式が成り立つ。　$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)}$　ただし，aは定数

解答

等式の両辺を x について微分すると　$\boldsymbol{f(x)=2x-4}$

また，与えられた等式において，$x=a$とおくと　$\int_a^a f(t)\,dt=a^2-4a-12$

左辺は 0 であるから　$0=a^2-4a-12$　　よって　$(a+2)(a-6)=0$　　したがって　$\boldsymbol{a=-2,\ 6}$

別解　（$f(x)=2x-4$ を求めるところまでは解答と同じ。）

与えられた等式に$f(t)=2t-4$ を代入すると　$\int_a^x (2t-4)\,dt=x^2-4x-12$

左辺の定積分を計算すると　$\int_a^x (2t-4)\,dt=\Big[t^2-4t\Big]_a^x=(x^2-4x)-(a^2-4a)$

$$=x^2-4x-a^2+4a$$

左辺と右辺を比較すると　$-a^2+4a=-12$　整理すると　$(a+2)(a-6)=0$　よって　$a=-2,\ 6$

〈注意〉本解答と別解では，本解答の方がらくに答えを出すことができる。

定積分を含む等式に関する問題で，性質$\int_a^a f(x)\,dx=0$ が使える場合は，使った方が計算がらくに

なる場合が多い。性質$\int_a^a f(x)\,dx=0$ は積極的に使いたい。

１５　定積分と面積

次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1)　$y=x^2+2x+2$,　x 軸,　$x=-1$,　$x=1$

(2)　$y=-x^2+x+2$,　x 軸

(3)　$y=x^2-5x+4$,　x 軸

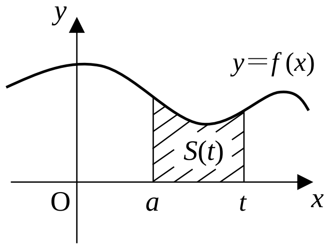
(4)　$y=x^2-2x$,　$y=x$

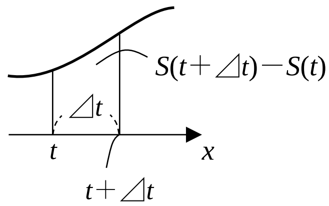
(5)　$y=x^2-6$,　$y=-x^2+2x+6$

要　点

定積分と面積

つねに $f(x) \geqq 0$ である曲線 $y=f(x)$ と x 軸，
および 2 直線 $x=a$，$x=t$ で囲まれた図形
の面積を $S(t)$ とおく。



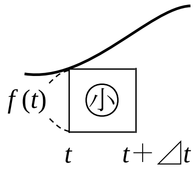


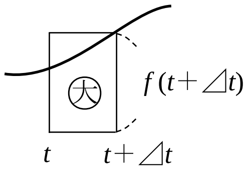
ここで，t を少し大きくして $t+⊿t$ とした
ときに $S(t)$ がどれくらい増えるのか考える。
右の図のような図形の大小関係より

$f(t)\cdot ⊿t \leqq S(t+⊿t)-S(t) \leqq f(t+⊿t)\cdot ⊿t$

各辺を $⊿t$ で割ると

$$f(t) \leqq \frac{S(t+⊿t)-S(t)}{⊿t} \leqq f(t+⊿t)$$





$⊿t \longrightarrow 0$ とすると，左辺と右辺は $f(t)$ となる。

また，中辺は　$\displaystyle\lim_{⊿t\to 0}\frac{S(t+⊿t)-S(t)}{⊿t}$ であるから，導関数の定義より　$S'(t)$

よって，$f(t)=S'(t)$ が成り立つ。

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とすると　$S(x)=F(x)+C$　（C は定数）

$S(a)=0$ から　$C=-F(a)$　　よって　$S(x)=F(x)-F(a)$　　したがって　$S(b)=F(b)-F(a)$

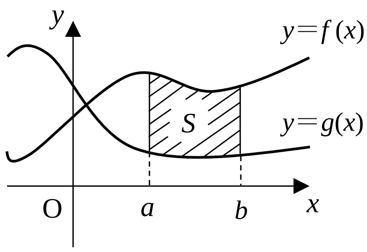
以上から，区間 $a \leqq x \leqq b$ でつねに $f(x) \geqq 0$ である曲線 $y=f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形の面積 S は

$$\boldsymbol{S} = S(b) = S(b)-S(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x)\,dx}$$

2 つの曲線の間の面積

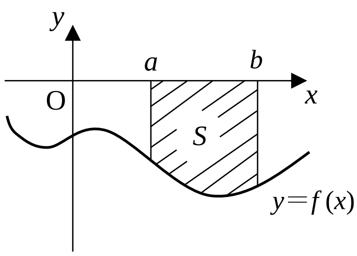
区間 $a \leqq x \leqq b$ で，$f(x) \geqq g(x)$ のとき，
2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$，および
2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形の
面積 S は

$$\boldsymbol{S} = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \{\boldsymbol{f(x)-g(x)}\}\,\boldsymbol{dx}$$



特に，区間 $a \leqq x \leqq b$ で，$f(x) \leqq 0$ の
とき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸，および
2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形
の面積 S は

$$\boldsymbol{S} = -\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f(x)\,dx}$$

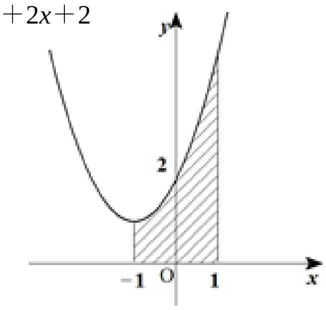


解答

(1)　$y=x^2+2x+2=(x+1)^2+1$

　より，$-1\leqq x\leqq 1$ において $y\geqq 0$ であるから，求める面積 S は

$y=x^2+2x+2$



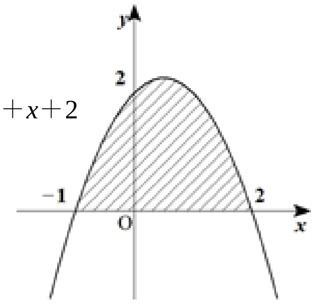
$$S=\int_{-1}^{1}(x^2+2x+2)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+2x\right]_{-1}^{1}=\left(\frac{1}{3}+1+2\right)-\left(-\frac{1}{3}+1-2\right)=\boldsymbol{\frac{14}{3}}$$

(2)　$y=-x^2+x+2=-(x+1)(x-2)$

　区間 $-1\leqq x\leqq 2$ において $y\geqq 0$ であるから，求める面積 S は

$y=-x^2+x+2$



$$S=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}=\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$$

別解　公式 $\displaystyle\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$ を利用する。

公式の証明

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta(\beta-\alpha)$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)\{2(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-3(\beta^2+2\beta\alpha+\alpha^2)+6\beta\alpha\}$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)(-\beta^2+2\beta\alpha-\alpha^2)=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

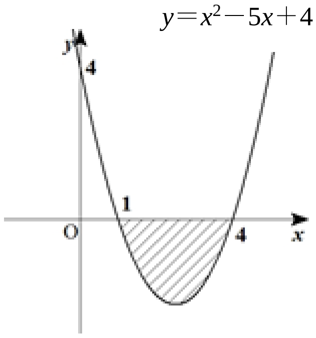
$\left(S=\displaystyle\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)\,dx\right.$までは解答と同じ。$\Big)$

$$S=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)\,dx=-\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)\,dx=-\left[-\frac{1}{6}\{2-(-1)\}^3\right]=\frac{9}{2}$$

(3)　$y=x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$

　区間 $1\leqq x\leqq 4$ において $y\leqq 0$ であるから，求める面積 S は

$y=x^2-5x+4$



$$S=-\int_{1}^{4}(x^2-5x+4)\,dx$$

$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+4x\right]_{1}^{4}=-\left(\frac{64}{3}-40+16\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+4\right)=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$$

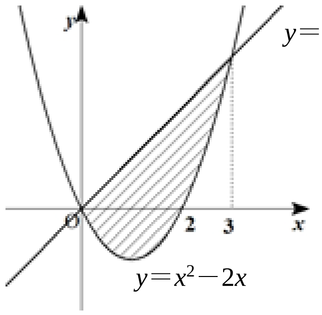
別解　公式 $\displaystyle\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$ を利用する。

$\left(S=-\displaystyle\int_{1}^{4}(x^2-5x+4)\,dx\right.$までは解答と同じ。$\Big)$

$$S=-\int_{1}^{4}(x^2-5x+4)\,dx=-\int_{1}^{4}(x-1)(x-4)\,dx=-\left\{-\frac{1}{6}(4-1)^3\right\}=\frac{9}{2}$$

(4)　$x^2-2x=x$ を解くと　$x(x-3)=0$ から　$x=0,\ 3$

区間 $0\leqq x\leqq 3$ において $x\geqq x^2-2x$ であるから，求める面積 S は



$$S=\int_0^3\{x-(x^2-2x)\}\,dx=\int_0^3(-x^2+3x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\left(-9+\frac{27}{2}\right)-0=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$$

$\boxed{別解}$　公式 $\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を利用する。

$$\left(S=\int_0^3(-x^2+3x)\,dx\text{までは解答と同じ。}\right)$$

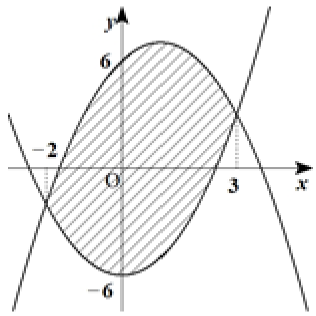
$$S=\int_0^3(-x^2+3x)\,dx=-\int_0^3 x(x-3)\,dx=-\left\{-\frac{1}{6}(3-0)^3\right\}=\frac{9}{2}$$

(5)　$x^2-6=-x^2+2x+6$ を解くと　$2x^2-2x-12=0$

$2(x+2)(x-3)=0$ から　$x=-2,\ 3$

区間 $-2\leqq x\leqq 3$ において $-x^2+2x+6\geqq x^2-6$ であるから，

求める面積 S は



$$S=\int_{-2}^3\{(-x^2+2x+6)-(x^2-6)\}\,dx=\int_{-2}^3(-2x^2+2x+12)\,dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+12x\right]_{-2}^3=(-18+9+36)-\left(\frac{16}{3}+4-24\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{125}{3}}$$

$\boxed{別解}$　公式 $\displaystyle\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を利用する。

$$\left(S=\int_{-2}^3(-2x^2+2x+12)\,dx\text{までは解答と同じ。}\right)$$

$$S=\int_{-2}^3(-2x^2+2x+12)\,dx=-2\int_{-2}^3(x+2)(x-3)\,dx=-2\left[-\frac{1}{6}\{3-(-2)\}^3\right]=\frac{125}{3}$$

$\boxed{16}$　**やや複雑な定積分と面積**

(1)　曲線 $y=x^3-3x^2-x+3$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(2)　①　点$(0,\ -1)$から曲線 $y=x^2+x$ に引いた接線の方程式を求めよ。

②　①で求めた 2 本の接線と曲線 $y=x^2+x$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

要　点

(1)　3 次関数のグラフと x 軸の交点を調べてグラフをかく。

グラフから積分区間と，3 次関数のグラフと x 軸の上下関係を調べて面積を求める。

(2)　放物線と接線のグラフをかき，積分区間と放物線，接線の上下関係を調べる。

放物線と接線で囲まれる図形の面積を求める定積分の被積分関数は$(x-\alpha)^2$の形で表されるので

$$\boldsymbol{\int (x-\alpha)^2\,dx=\frac{(x-\alpha)^3}{3}+C}\qquad (C\text{は積分定数})$$

を利用すると計算がらくになる。

$\left(\boxed{\int (x-\alpha)^2\,dx=\frac{(x-\alpha)^3}{3}+C\quad \big(C\text{は積分定数}\big)\text{の証明}}\right.$

$$\int (x-\alpha)^2\,dx=\int (x^2-2\alpha x+\alpha^2)\,dx=\frac{1}{3}x^3-\alpha x^2+\alpha^2 x+C'$$

$$=\frac{1}{3}(x^3-3\alpha x^2+3\alpha^2 x-\alpha^3)+\frac{1}{3}\alpha^3+C'=\frac{1}{3}(x-\alpha)^3+\frac{1}{3}\alpha^3+C'$$

$\frac{1}{3}\alpha^3+C'$をCと置き直すと　$\int (x-\alpha)^2\,dx=\frac{(x-\alpha)^3}{3}+C\quad \big(C\text{は積分定数}\big)$)

（一般に，nが 0 以上の整数のとき　$\{(x-\alpha)^{n+1}\}'=(n+1)(x-\alpha)^n$　が成り立つ。

よって　$\left\{\frac{1}{n+1}(x-\alpha)^{n+1}\right\}'=(x-\alpha)^n$

したがって，$\int (x-\alpha)^n\,dx=\frac{1}{n+1}(x-\alpha)^{n+1}+C\quad \big(C\text{は積分定数}\big)$　が成り立つ。）

解答

(1)　$f(x)=x^3-3x^2-x+3$ とおくと

$f(1)=1-3-1+3=0$ より

$f(x)=(x-1)(x^2-2x-3)$

$=(x-1)(x+1)(x-3)$

1	1	−3	−1	3
		1	−2	−3
	1	−2	−3	0

よって，曲線 y と x 軸との交点は

$(-1,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(3,\ 0)$であるから

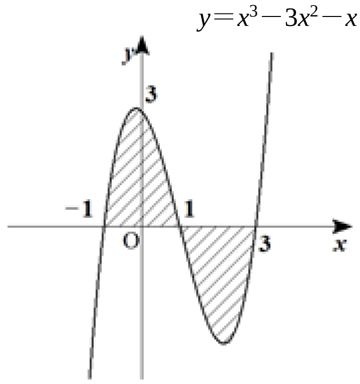
曲線の概形は右の図のようになり，

面積 S は斜線部の図形の面積である。

$-1\leqq x\leqq 1$ で $y\geqq 0$，$1\leqq x\leqq 3$ で $y\leqq 0$

であるから，求める面積 S は

$y=x^3-3x^2-x+3$



$$S=\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2-x+3)\,dx+\int_{1}^{3}\{-(x^3-3x^2-x+3)\}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_{-1}^{1}+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{1}{2}x^2-3x\right]_{1}^{3}$$

$$=\left(\frac{1}{4}-1-\frac{1}{2}+3\right)-\left(\frac{1}{4}+1-\frac{1}{2}-3\right)+\left(-\frac{81}{4}+27+\frac{9}{2}-9\right)-\left(-\frac{1}{4}+1+\frac{1}{2}-3\right)$$

$$=4+4=\mathbf{8}$$

(2)　①　$f(x)=x^2+x$ とすると　$f'(x)=2x+1$

接点の座標を$(a,\ a^2+a)$とおくと，その点における

接線の傾きは　$f'(a)=2a+1$

よって，この接線の方程式は

$$y-(a^2+a)=(2a+1)(x-a)$$

すなわち　$y=(2a+1)x-a^2$　……①

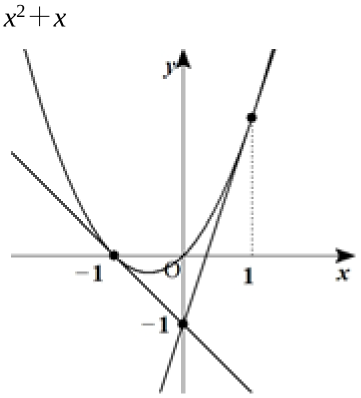
直線①が点$(0,\ -1)$を通るから　$-1=-a^2$

これを解くと　$a=-1,\ 1$

$a=-1$ のとき，①は　$y=-x-1$

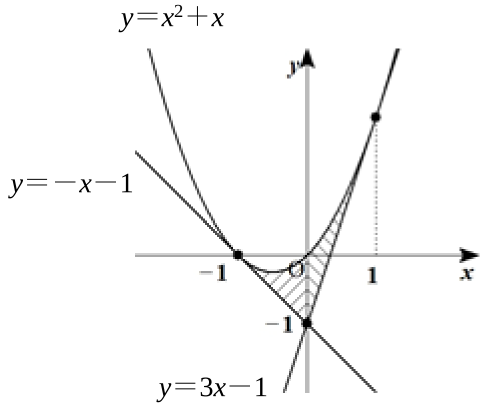
$a=1$ のとき，①は　$y=3x-1$

以上から，求める接線の方程式は　$\boldsymbol{y=-x-1,\ y=3x-1}$



②　求める面積 S は，右の図の斜線部分の面積であるから

$$S=\int_{-1}^{0}\{(x^2+x)-(-x-1)\}\,dx$$
$$+\int_{0}^{1}\{(x^2+x)-(3x-1)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)\,dx+\int_{0}^{1}(x^2-2x+1)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_{0}^{1}$$
$$=-\left(-\frac{1}{3}+1-1\right)+\left(\frac{1}{3}-1+1\right)=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$



$\boxed{\text{別解}}$　公式 $\displaystyle\int(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha})^2\,\boldsymbol{dx}=\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha})^3}{\boldsymbol{3}}+\boldsymbol{C}$　（Cは積分定数）　を利用する。

$\left(S=\displaystyle\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)\,dx+\int_{0}^{1}(x^2-2x+1)\,dx\text{までは解答と同じ。}\right)$

$$S=\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)\,dx+\int_{0}^{1}(x^2-2x+1)\,dx=\int_{-1}^{0}(x+1)^2\,dx+\int_{0}^{1}(x-1)^2\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_{0}^{1}=\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$$