

複素数と方程式

1 複素数の計算

次の計算をせよ。ただし、 i は虚数単位とする。

(注意) 以後、特に断りがない限り、 i は虚数単位を表すものとする。

$$(1) \frac{2+5i}{3-2i}$$

$$(2) \sqrt{-5} \times \sqrt{-20}$$

要 点

i を普通の文字のように扱います。 i^2 が出てきたら、 $i^2=-1$ とします。

(1) 複素数は、実数 a , b を用いて $a+bi$ の形で表される数です。 $a+bi$, $a-bi$ を、互いに共役な複素数といいます。分母と共役な複素数を分母、分子に掛けて、分母を実数化します。

(2) $a>0$ のとき、 $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$ として計算します。

解答

$$(1) \frac{2+5i}{3-2i} = \frac{(2+5i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{6+4i+15i+10i^2}{9-4i^2} = \frac{6+19i-10}{9+4} = -\frac{4}{13} + \frac{19}{13}i$$

$$(2) \sqrt{-5} \times \sqrt{-20} = \sqrt{5}i \times \sqrt{20}i = \sqrt{100}i^2 = -10$$

2 複素数の相等

等式 $(4+3i)x+(1+2i)y+5=0$ を満たす実数 x , y を求めよ。

要 点

a , b , c , d が実数のとき $a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c$ かつ $b=d$

特に $a+bi=0 \Leftrightarrow a=b=0$

解答

与えられた等式の左辺を i について整理すると $4x+y+5+(3x+2y)i=0$

x , y が実数であるから、 $4x+y+5$, $3x+2y$ も実数である。

よって $\begin{cases} 4x+y+5=0 \\ 3x+2y=0 \end{cases}$ を満たす x , y を求めればよい。

連立方程式を解くと $x=-2$, $y=3$

3 2次方程式の解と判別式

(1) 次の2次方程式を解け。

① $x^2 = -2$

② $2x(3-x) = 2x+3$

(2) 次の2次方程式の解の種類を判別せよ。

① $2x^2 - 5x + 4 = 0$

② $3x^2 - 8x - 2 = 0$

(3) 2次方程式 $2x^2 - 2kx + k^2 - 3k + 4 = 0$ が重解をもつような定数 k の値と、そのときの重解をすべて求めよ。

要 点

負の数の平方根

$k > 0$ とする。負の数 $-k$ の平方根は $\pm\sqrt{-k}$ すなわち $\pm\sqrt{k}i$

2次方程式の解の公式

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

2次方程式の解の種類の判別

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式を $D = b^2 - 4ac$ とする。

異なる2つの実数解をもつ	$\Leftrightarrow D > 0$	}	実数解をもつ	$\Leftrightarrow D \geq 0$
重解をもつ	$\Leftrightarrow D = 0$			
異なる2つの虚数解をもつ	$\Leftrightarrow D < 0$			

解答

(1) ① $x = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}i$

② 与えられた方程式を整理すると $2x^2 - 4x + 3 = 0$ となるので、解の公式より

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 24}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}i}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{2}$$

(2) ① $D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 25 - 32 = -7$ より、 $D < 0$ であるから 異なる2つの虚数解をもつ。

② $D = (-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 64 + 24 = 88$ より、 $D > 0$ であるから 異なる2つの実数解をもつ。

(3) $D = (-2k)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k^2 - 3k + 4) = 4k^2 - 8k^2 + 24k - 32$

$$= -4k^2 + 24k - 32 = -4(k^2 - 6k + 8) = -4(k-2)(k-4)$$

題意より、 $D = 0$ となるときの k の値を求める。 $-4(k-2)(k-4) = 0 \Rightarrow k = 2, 4$

$k = 2$ のとき $2x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 3 \cdot 2 + 4 = 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow 2(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$

$k = 4$ のとき $2x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 - 3 \cdot 4 + 4 = 2x^2 - 8x + 8 = 0 \Rightarrow 2(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$

以上より $k = 2$ のとき $x = 1$, $k = 4$ のとき $x = 2$

4 2次方程式の解と係数の関係

2次方程式 $2x^2+6x-3=0$ の2つの解を α, β とするとき、次の値を求めよ。

- (1) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$ (2) $\alpha^2 + \beta^2$ (3) $\alpha^3 + \beta^3$

要 点

2次方程式の解と係数の関係

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α, β とすると $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$

解答

2次方程式の解と係数の関係により $\alpha + \beta = -\frac{6}{2} = -3, \alpha\beta = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$

(1) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = -\frac{3}{2} \cdot (-3) = \frac{9}{2}$

(2) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-3)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 9 + 3 = 12$

(3) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = (-3)^3 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (-3) = -27 - \frac{27}{2} = -\frac{81}{2}$

別解 $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = (\alpha + \beta)\{(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha\beta\}$
 $= -3 \cdot \left\{12 - \left(-\frac{3}{2}\right)\right\} = -3 \cdot \frac{27}{2} = -\frac{81}{2}$

5 2次方程式の作成

- (1) 2つの数 $3 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}$ を解にもつ2次方程式を1つ作れ。
 (2) 2次方程式 $x^2+3x-6=0$ の2つの解を α, β とするとき、 $2\alpha + \beta, \alpha + 2\beta$ を解にもつ2次方程式を1つ作れ。
 (3) 和が2、積が7である2つの数を求めよ。

要 点

2つの数 α, β を解にもつ2次方程式は $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

〈注意〉 任意の2次方程式を求める場合、 x^2 の係数が1のものを考えればよい。

解答

- (1) $\alpha = 3 + \sqrt{2}, \beta = 3 - \sqrt{2}$ とする。
 $\alpha + \beta = (3 + \sqrt{2}) + (3 - \sqrt{2}) = 6$
 $\alpha\beta = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7$
 よって $x^2 - 6x + 7 = 0$

2次方程式 $x^2+bx+c=0$ の解が α, β であるとき
 $\alpha + \beta = -b, \alpha\beta = c$

(2) 2次方程式の解と係数の関係により $\alpha + \beta = -3, \alpha\beta = -6$

これにより $(2\alpha + \beta) + (\alpha + 2\beta) = 3\alpha + 3\beta = 3(\alpha + \beta) = 3 \cdot (-3) = -9$

$$\begin{aligned} (2\alpha + \beta)(\alpha + 2\beta) &= 2\alpha^2 + 4\alpha\beta + \alpha\beta + 2\beta^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2) + 5\alpha\beta \\ &= 2\{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\} + 5\alpha\beta = 2(\alpha + \beta)^2 + \alpha\beta \\ &= 2 \cdot (-3)^2 + (-6) = 18 - 6 = 12 \end{aligned}$$

よって $x^2 + 9x + 12 = 0$

(3) 2つの数を α, β とおくと $\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 7$

よって, α, β を解にもつ2次方程式は $x^2 - 2x + 7 = 0$

解の公式により $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 28}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{6}i}{2} = 1 \pm \sqrt{6}i$

したがって, 2つの数は $1 + \sqrt{6}i, 1 - \sqrt{6}i$

6 2次方程式の実数解の符号

2次方程式 $x^2 + mx + m + 8 = 0$ が, 次の条件を満たすように実数 m の値の範囲を定めよ。

- (1) 異なる2つの正の解をもつ。
- (2) 異なる2つの負の解をもつ。
- (3) 正と負の解をもつ。

要 点

2つの実数 α, β について, 次のことが成り立ちます。

$$\alpha > 0 \text{ かつ } \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta > 0 \text{ かつ } \alpha\beta > 0$$

$$\alpha < 0 \text{ かつ } \beta < 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta < 0 \text{ かつ } \alpha\beta > 0$$

$$\alpha \text{ と } \beta \text{ が異符号} \Leftrightarrow \alpha\beta < 0$$

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式を D , 2つの解を α, β とすると, 次のことがいえます。

Ⅰ 異なる2つの正の解をもつ $\Leftrightarrow D > 0, \alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$

〈注意〉正や負は実数のときに考えることなので, 2次方程式は実数解をもたなければいけない。

Ⅱ 異なる2つの負の解をもつ $\Leftrightarrow D > 0, \alpha + \beta < 0, \alpha\beta > 0$

Ⅲ 正と負の解をもつ $\Leftrightarrow \alpha\beta < 0$

コメント: 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ に関して, $D = b^2 - 4ac = a^2 \left(\frac{b^2 - 4ac}{a^2} \right) = a^2 \left\{ \left(\frac{b}{a} \right)^2 - 4 \left(\frac{c}{a} \right) \right\}$,

$\alpha\beta = \frac{c}{a}$ より, $\alpha\beta < 0$ のとき $D > 0$ となる。これにより, Ⅲの条件は $\alpha\beta < 0$ のみ満たせばよい。

解答

2次方程式 $x^2+mx+m+8=0$ の判別式を D , 2つの解を α, β とすると

$$D=m^2-4\cdot 1\cdot (m+8)=m^2-4m-32=(m+4)(m-8), \quad \alpha+\beta=-m, \quad \alpha\beta=m+8$$

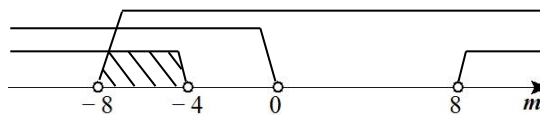
(1) $D>0, \alpha+\beta>0, \alpha\beta>0$ を満たせばよい。

(i) $D>0$ すなわち $(m+4)(m-8)>0$ よって $m<-4, 8<m$

(ii) $\alpha+\beta>0$ すなわち $-m>0$ よって $m<0$

(iii) $\alpha\beta>0$ すなわち $m+8>0$ よって $m>-8$

以上のことから, 右の数直線より $-8<m<-4$



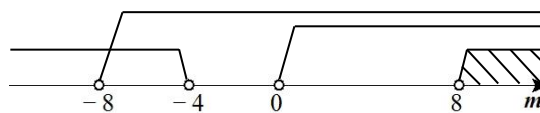
(2) $D>0, \alpha+\beta<0, \alpha\beta>0$ を満たせばよい。

(i) $D>0$ (1)より $m<-4, 8<m$

(ii) $\alpha+\beta<0$ すなわち $-m<0$ よって $m>0$

(iii) $\alpha\beta>0$ (1)より $m>-8$

以上のことから, 右の数直線より $m>8$



(3) $\alpha\beta<0$ を満たせばよい。

$m+8<0$ より $m<-8$

7 剰余の定理

(1) 多項式 $2x^3+8x^2+5x-2$ を $x+3$ で割ったときの余りを求めよ。

(2) 多項式 $P(x)$ を, $2x+1, 2x-1$ で割ったときの余りがそれぞれ $5, 1$ のとき, $P(x)$ を $4x^2-1$ で割ったときの余りを求めよ。

要 点

剰余の定理

- ・多項式 $P(x)$ を 1 次式 $x-\alpha$ で割った余りは $P(\alpha)$
- ・多項式 $P(x)$ を 1 次式 $ax+b$ で割った余りは $P\left(-\frac{b}{a}\right)$

多項式の除法

A, B を同じ文字についての多項式とする。ただし, $B\neq 0$ とする。

A を B で割ったとき, 商が Q , 余りが R になったとする。このとき, $A=BQ+R$ が成り立つ。

余り R の次数は割る式 B の次数より小さくなる。

解答

(1) $P(x)=2x^3+8x^2+5x-2$ とおく。

$$\begin{aligned} \text{剰余の定理により, 求める余りは } P(-3) &= 2\cdot(-3)^3+8\cdot(-3)^2+5\cdot(-3)-2 \\ &= -54+72-15-2=1 \end{aligned}$$

(2) 2次式 $4x^2-1$ で割ったときの余りは1次式または定数となるので $ax+b$ とおける。

$4x^2-1=(2x+1)(2x-1)$ より, $P(x)$ を 2次式 $(2x+1)(2x-1)$ で割ったときの商を Q とすると

$$P(x)=(2x+1)(2x-1)Q+ax+b$$

と表すことができる。

剰余の定理により $P\left(-\frac{1}{2}\right)=5, P\left(\frac{1}{2}\right)=1$ であるから

$$-\frac{1}{2}a+b=5, \frac{1}{2}a+b=1$$

これらを連立させて解くと $a=-4, b=3$ よって, 求める余りは $-4x+3$

8 高次方程式

次の方程式を解け。

(1) $x^3=-1$

(2) $x^3-4x^2+2x+1=0$

要点

因数定理

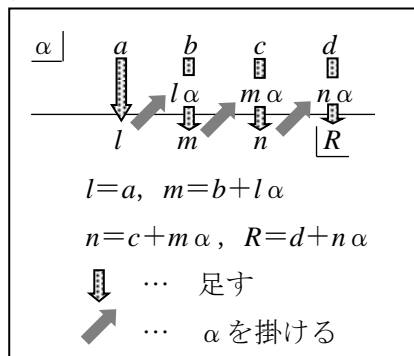
- ・ 1次式 $x-\alpha$ が多項式 $P(x)$ の因数である $\Leftrightarrow P(\alpha)=0$
- ・ 1次式 $ax+b$ が多項式 $P(x)$ の因数である $\Leftrightarrow P\left(-\frac{b}{a}\right)=0$

与えられた方程式を $P(x)=0$ の形に変形し, $P(\alpha)=0$ を満たす α を見つけ出します。このとき, 因数定理により多項式 $P(x)$ は $x-\alpha$ を因数にもつので, $P(x)=(x-\alpha)\cdot Q(x)$ と表すことができます。これを繰り返し $P(x)$ を 1次式または 2次式の積で表わせれば, 高次方程式 $P(x)=0$ の解を求めることができます。

組立除法

多項式 $P(x)$ を 1次式 $x-\alpha$ で割ったときの商と余りを求める簡単な方法に, 組立除法と呼ばれるものがあります。

たとえば, 多項式 $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ を $x-\alpha$ で割ったときの商を lx^2+mx+n , 余りを R とすると, 右のようにして l, m, n, R を求めることができます。



解答

(1) 与えられた方程式を整理すると $x^3+1=0$ となる。左辺を因数分解すると

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1) \quad \text{より} \quad x+1=0 \quad \text{または} \quad x^2-x+1=0$$

解の公式により $x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

したがって $x = -1, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

(2) $P(x)=x^3-4x^2+2x+1$ とおくと $1^3-4\cdot 1^2+2\cdot 1+1=1-4+2+1=0$ より $P(1)=0$

右の組立除法により

$$P(x)=(x-1)(x^2-3x-1)$$

$P(x)=0$ から $x-1=0$ または $x^2-3x-1=0$

解の公式により

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

したがって $x=1, \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -4 & 2 & 1 \\ & & 1 & -3 & -1 \\ \hline & 1 & -3 & -1 & 0 \end{array}$$

9 解からの係数決定

- (1) 方程式 $x^3-ax^2+2=0$ の 1 つの解が $x=1$ であるとき、実数 a の値を求めよ。また、そのときの他の解を求めよ。
- (2) 方程式 $x^3+ax^2+bx+10=0$ の 1 つの解が $x=3-i$ であるとき、実数 a, b の値を求めよ。また、そのときの他の解を求めよ。

要 点

虚数解をもつ高次方程式

実数係数の高次方程式が虚数解 $x=s+ti$ (s, t は実数) をもつとき、共役な複素数 $s-ti$ もこの高次方程式の解となることが知られています。

$$x=s \pm ti \Rightarrow x-s = \pm ti \xrightarrow{\text{両辺 2乗する}} (x-s)^2 = (\pm ti)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2sx + s^2 = -t^2 \Rightarrow x^2 - 2sx + s^2 + t^2 = 0$$

実数係数の高次方程式 $P(x)=0$ が虚数解 $x=s+ti$ をもつとき、 $P(x)$ は $x^2-2sx+s^2+t^2$ で割り切れます。

3 次方程式の解と係数の関係

3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の 3 つの解を α, β, γ とすると

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

解答

(1) 与えられた方程式に $x=1$ を代入すると

$$1^3-a\cdot 1^2+2=1-a+2=0 \quad \text{よって} \quad a=3$$

方程式 $x^3-3x^2+2=0$ は $x=1$ を解にもつから

右の組立除法により $(x-1)(x^2-2x-2)=0$

解の公式により $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$

したがって $a=3$, 他の解は $x=1 \pm \sqrt{3}$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ & & 1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}$$

(2) この方程式は $x=3+i$ も解にもつ。

$$x=3\pm i \Rightarrow x-3=\pm i \xrightarrow{\text{両辺2乗する}} (x-3)^2=(\pm i)^2$$

$$\Rightarrow x^2-6x+9=-1 \Rightarrow x^2-6x+10=0$$

これより、 $x^3+ax^2+bx+10$ は $x^2-6x+10$ で割り切れる。

右の計算により商と余りが求まる。

割り切れるので余りは0であるから

$$\{(b-10)+6(a+6)\}x+10-10(a+6)=0$$

$$\begin{cases} b+6a+26=0 \\ -10a-50=0 \end{cases}$$

これを解くと $a=-5, b=4$

よって $x^3-5x^2+4x+10=(x^2-6x+10)\{x+(-5+6)\}$

$$=(x^2-6x+10)(x+1)=0$$

したがって $a=-5, b=4$, 他の解は $x=3+i, -1$

$$\begin{array}{r} x+(a+6) \\ x^2-6x+10 \overline{) x^3+ax^2+bx+10} \\ \underline{x^3-6x^2+10x} \\ (a+6)x^2+(b-10)x+10 \\ \underline{(a+6)x^2-6(a+6)x+10(a+6)} \\ \{(b-10)+6(a+6)\}x+10-10(a+6) \end{array}$$

別解1 $x=3-i$ を方程式 $x^3+ax^2+bx+10=0$ に代入する。

$$\begin{aligned} (3-i)^3+a(3-i)^2+b(3-i)+10 &= 3^3-3\cdot 3^2\cdot i+3\cdot 3\cdot i^2-i^3+a(9-6i+i^2)+3b-bi+10 \\ &= 27-27i-9+i+9a-6ai-a+3b-bi+10=8a+3b+28+(-6a-b-26)i=0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 8a+3b+28=0 \\ -6a-b-26=0 \end{cases}$$

これを解くと $a=-5, b=4$

方程式 $x^3-5x^2+4x+10=0$ を解くと $x=-1, 3\pm i$

したがって $a=-5, b=4$, 他の解は $x=-1, 3+i$

別解2 この方程式は $x=3+i$ も解にもつ。 $\alpha=3-i, \beta=3+i, x=3\pm i$ 以外の解を γ とおき、3次方程式の解と係数の関係を用いる。

$$\begin{cases} (3-i)+(3+i)+\gamma=-a & \dots\text{①} \\ (3-i)(3+i)+(3+i)\gamma+\gamma(3-i)=b & \dots\text{②} \\ (3-i)(3+i)\gamma=-10 & \dots\text{③} \end{cases}$$

③より $10\gamma=-10$ よって $\gamma=-1$

①より $6-1=-a$ よって $a=-5$

②より $10-(3-i)-(3+i)=b$ よって $b=4$

以上より $a=-5, b=4$, 他の解は $x=3+i, -1$