数列

ここで扱う数は，すべて実数とする。

1　等差数列・等比数列

次の数列の一般項 a_n，初項から第 n 項までの和 S_n をそれぞれ求めよ。

(1)　1，3，5，7，9，……

(2)　1，(−3)，9，(−27)，81，……

(3)　第 3 項が 2，第 5 項が −1 の等差数列

(4)　第 2 項が 8，第 5 項が 1 の等比数列

(5)　初項から第 5 項までの和が 10，第 6 項から第 10 項までの和が 60 である等差数列

(6)　初項から第 3 項までの和が 3，第 4 項から第 6 項までの和が 24 である等比数列

要　点

・等差数列

等差数列$\{a_n\}$の初項を a，公差を d，末項を l，一般項を a_n，初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$\boldsymbol{a_n=a+(n-1)d}$$

$$\boldsymbol{S_n=\frac{1}{2}n(a+l)=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}}$$

・等比数列

等比数列$\{a_n\}$の初項を a，公比を r，一般項を a_n，初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$\boldsymbol{a_n=ar^{n-1}}$$

$\boldsymbol{r\neq1}$ **のとき**　$\boldsymbol{S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}}$，　　$\boldsymbol{r=1}$ **のとき**　$\boldsymbol{S_n=na}$

解答

(1)　初項が 1，公差が 2 の等差数列であるから

$$\boldsymbol{a_n}=1+(n-1)\cdot2=\boldsymbol{2n-1},\qquad \boldsymbol{S_n}=\frac{1}{2}n\{2\cdot1+(n-1)\cdot2\}=\boldsymbol{n^2}$$

(2)　初項が 1，公比が −3 の等比数列であるから

$$\boldsymbol{a_n}=1\cdot(-3)^{n-1}=\boldsymbol{(-3)^{n-1}},\qquad \boldsymbol{S_n}=\frac{1\cdot\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)}=\boldsymbol{\frac{1-(-3)^n}{4}}$$

(3)　等差数列の初項を a，公差を d とすると

$$a_3=a+(3-1)\cdot d=a+2d,\quad a_5=a+(5-1)\cdot d=a+4d$$

$a_3=2$，$a_5=-1$ であるから $\begin{cases}a+2d=2\\a+4d=-1\end{cases}$　これを解くと　$a=5$，$d=-\dfrac{3}{2}$

よって　$\boldsymbol{a_n}=5+(n-1)\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\boldsymbol{-\dfrac{3}{2}n+\dfrac{13}{2}}$，　　$\boldsymbol{S_n}=\dfrac{1}{2}n\left\{2\cdot5+(n-1)\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)\right\}=\boldsymbol{-\dfrac{3}{4}n^2+\dfrac{23}{4}n}$

(4)　等比数列の初項を a，公比を r とすると　$a_2=a\cdot r^{2-1}=ar$，$a_5=a\cdot r^{5-1}=ar^4$

$a_2=8$，$a_5=1$ であるから　$\begin{cases} ar=8 & \cdots\cdots① \\ ar^4=1 & \cdots\cdots② \end{cases}$　②に①を代入すると　$8r^3=1$

r は実数であるから　$r=\dfrac{1}{2}$　これを①に代入すると　$a=16$

よって　$\boldsymbol{a_n}=16\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=2^4\cdot 2^{-(n-1)}=\boldsymbol{2^{5-n}}$

$$\boldsymbol{S_n}=\frac{16\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=32\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=32-2^5\cdot 2^{-n}=\boldsymbol{32-2^{5-n}}$$

(5)　等差数列の初項を a，公差を d とすると

$$S_5=\frac{1}{2}\cdot 5\{2a+(5-1)\cdot d\}=5a+10d,\quad S_{10}=\frac{1}{2}\cdot 10\{2a+(10-1)\cdot d\}=10a+45d$$

$S_5=10$，$S_{10}-S_5=60$ であるから　$\begin{cases} 5a+10d=10 \\ 10a+45d-(5a+10d)=60 \end{cases}$　これを解くと　$a=-2$，$d=2$

よって　$\boldsymbol{a_n}=-2+(n-1)\cdot 2=\boldsymbol{2n-4,}$　$\boldsymbol{S_n}=\dfrac{1}{2}n\{2\cdot(-2)+(n-1)\cdot 2\}=\boldsymbol{n^2-3n}$

(6)　等比数列の初項を a，公比を r とする。　ここで，$r=1$ のとき　$S_3=3a$,　$S_3=3$ であるから　$a=1$

$S_6-S_3=6-3=3\neq 24$　よって，$r\neq 1$ である。　$S_3=\dfrac{a(1-r^3)}{1-r}$，$S_6-S_3=\dfrac{a(1-r^6)}{1-r}-\dfrac{a(1-r^3)}{1-r}$

$S_3=3$，$S_6-S_3=24$ であるから　$\begin{cases} \dfrac{a(1-r^3)}{1-r}=3 & \cdots\cdots① \\ \dfrac{a(1-r^6)}{1-r}-\dfrac{a(1-r^3)}{1-r}=24 & \cdots\cdots② \end{cases}$

$1-r^6=(1-r^3)(1+r^3)$であるから，②に①を代入すると　$3(1+r^3)-3=24$　整理すると　$r^3=8$

r は実数であるから　$r=2$　これを①に代入すると　$a=\dfrac{3}{7}$

よって　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{3}{7}\cdot 2^{n-1},}$　$\boldsymbol{S_n}=\dfrac{\frac{3}{7}(2^n-1)}{2-1}=\boldsymbol{\dfrac{3}{7}(2^n-1)}$

コ ラ ム

各項の逆数が等差数列である数列を**調和数列**といいます。

例えば，1，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{1}{7}$，……，$\dfrac{1}{2n-1}$ は調和数列です。さて，調和数列 6，4，□，… の□に入る数は，$\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{□}$ が等差数列をなすから，この公差は　$\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{12}$　よって　$\dfrac{1}{□}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{3}$

したがって，□には 3 が入ります。

2　等差中項・等比中項

4 つの数 1，a，b，10 がある。1，a，b はこの順で等比数列をなし，a，b，10 はこの順で等差数列をなす。このような実数 a，b をすべて求めよ。

要　点

・等差中項

数列 a，b，c が等差数列のとき，b を a と c の等差中項といい，　$\boldsymbol{2b=a+c}$　が成り立つ。

・等比中項

数列 a，b，c が等比数列のとき，b を a と c の等比中項といい，　$\boldsymbol{b^2=ac}$　が成り立つ。

解答

等差中項，等比中項の性質から　$\begin{cases} a^2=b & \cdots\cdots① \\ 2b=a+10 & \cdots\cdots② \end{cases}$

②に①を代入すると　$2a^2=a+10$　整理して因数分解すると　$(a+2)(2a-5)=0$　よって　$a=-2,\ \dfrac{5}{2}$

したがって　$\boldsymbol{a=-2,\ b=4}$　**または**　$\boldsymbol{a=\dfrac{5}{2},\ b=\dfrac{25}{4}}$

3　Σ の計算

〈注意〉Σ はシグマと読む。

(1)　次の和を求めよ。

①　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+2)$　　②　$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(k+1)^2$　　③　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

(2)　数列 $1\cdot1$，$2\cdot3$，$3\cdot5$，$4\cdot7$，…… の一般項 a_n と，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

要　点

・Σ の定義

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$$

・Σ の公式

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)\ ,\qquad \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2,\qquad \sum_{k=1}^{n}c=cn\qquad \text{ただし，}c\text{ は定数}$$

・Σ の性質

$$\sum_{k=1}^{n}(pa_k+qb_k)=p\sum_{k=1}^{n}a_k+q\sum_{k=1}^{n}b_k$$

解答

(1)　①　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+2)=\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}2=\frac{1}{2}n(n+1)+2n=\frac{1}{2}n\{(n+1)+4\}=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+5)}$

②　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2=\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$

$\displaystyle=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$

$\displaystyle=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)+6(n+1)+6\}=\frac{1}{6}n(2n^2+9n+13)$

まず，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2$ を求めてから，n に 10 を代入する。

よって，n に 10 を代入すると　$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(k+1)^2=\frac{1}{6}\cdot10(2\cdot10^2+9\cdot10+13)=\mathbf{505}$

③　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\boldsymbol{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

(2)　$1\cdot1$，$2\cdot3$，$3\cdot5$，$4\cdot7$，…… は，初項 1，公差 1 の等差数列と初項 1，公差 2 の等差数列の積の数列であるから，一般項 a_n は　　$\boldsymbol{a_n}=\{1+(n-1)\cdot1\}\{1+(n-1)\cdot2\}=\boldsymbol{n(2n-1)}$

また，$\displaystyle 1\cdot1+2\cdot3+3\cdot5+4\cdot7+\cdots\cdots+n(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}k(2k-1)$ であるから，初項から第 n 項までの和 S_n は

$$\boldsymbol{S_n}=\sum_{k=1}^{n}k(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1)-3\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)}$$

$\boxed{4}$　いろいろな数列

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1)　$\dfrac{1}{1\cdot3}$，$\dfrac{1}{3\cdot5}$，$\dfrac{1}{5\cdot7}$，$\dfrac{1}{7\cdot9}$，……　　　(2)　$2\cdot2$，$4\cdot4$，$6\cdot8$，$8\cdot16$，……

(3)　$\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$，$\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}$，……

要　点

(1)　一般に，a，b，c を自然数，$b\neq c$ とすると　　$\displaystyle\frac{1}{(an+b)(an+c)}=\frac{1}{c-b}\left(\frac{1}{an+b}-\frac{1}{an+c}\right)$

が成り立ちます。この変形を，**部分分数に分解する**といい，これを利用して和を求めます。

(2)　(等差数列)×(等比数列)からなる数列の和 S は，等比数列の公比が r のとき，$S-rS$ を考えることにより求めることができます。

(3)　分母を有理化して，和を求めます。

解答

(1)　一般項は $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ であり，

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\text{であるから}$$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\cancel{\cdots\cdots}+\left(\cancel{\frac{1}{2n-1}}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{n}{2n+1}}$$

> 部分分数に分解するには，等式
>
> $$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{a}{2n-1}+\frac{b}{2n+1}$$
>
> が n についての恒等式となるような定数 a，b の値を求める。
> 分母をはらって，係数を比較すると
>
> $a=\dfrac{1}{2}$，$b=-\dfrac{1}{2}$ が得られる。

(2)　一般項は $2n\cdot 2^n$ であるから，求める和を S とすると

$$\begin{array}{rrl}
 & S= & 2\cdot 2+4\cdot 4+6\cdot 8+\cdots\cdots+2n\cdot 2^n \\
-) & 2S= & \qquad\quad 2\cdot 4+4\cdot 8+\cdots\cdots+2(n-1)\cdot 2^n+2n\cdot 2^{n+1} \\ \hline
 & S-2S= & 2\cdot 2+2\cdot 4+2\cdot 8+\cdots\cdots+2\cdot 2^n-2n\cdot 2^{n+1}
\end{array}$$

$$-S=2(2+4+8+\cdots\cdots+2^n)-2n\cdot 2^{n+1}=2\cdot\frac{2(2^n-1)}{2-1}-2n\cdot 2^{n+1}=2^{n+2}-4-n\cdot 2^{n+2}$$

よって　$S=\boldsymbol{(n-1)\cdot 2^{n+2}+4}$

(3)　第 k 項は $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}$ であり，$\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}}=\dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}}{k+1-(k+2)}=\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}$ であるから，

この式に $k=1$，2，……，n を代入して，辺々を加えると

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+2}+\frac{1}{2+\sqrt{5}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$$

$$=(\cancel{\sqrt{3}}-\sqrt{2})+(\cancel{2}-\cancel{\sqrt{3}})+(\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{2})+\cancel{\cdots\cdots}+(\sqrt{n+2}-\cancel{\sqrt{n+1}})=\boldsymbol{-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}}$$

5　**階差数列**

(1)　数列 1，2，0，4，-4，12，……　の一般項 a_n を求めよ。

(2)　数列 2，3，6，11，18，……　の一般項 a_n と，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

要　点

数列 $\{a_n\}$ の隣り合う 2 つの項の差 $b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を項とする数列 $\{b_n\}$ を，数列 $\{a_n\}$ の**階差数列**という。

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
\{a_n\} & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & \cdots\cdots & & a_n & & a_{n+1} \\
 & & \diagdown\ \diagup & & \diagdown\ \diagup & & \diagdown\ \diagup & & \diagdown & & \diagup & & \diagdown\ \diagup & \\
\{b_n\} & & b_1 & & b_2 & & b_3 & & & \cdots\cdots\cdots\cdots & & & b_n &
\end{array}$$

$$\boldsymbol{n\geqq 2\text{ のとき}\quad a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k}$$

解答

求める数列$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$とする。

(1)　数列$\{b_n\}$は，1，-2，4，-8，16，…… であるから，初項 1，公比-2 の等比数列である。

よって　$b_n=1\cdot(-2)^{n-1}=(-2)^{n-1}$　　したがって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-2)^{k-1}=1+\frac{1-(-2)^{n-1}}{1-(-2)}=1+\frac{1}{3}\{1-(-2)^{n-1}\}=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}(-2)^{n-1}$$

また，$n=1$ のとき，$a_1=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}(-2)^0=1$ より，数列$\{a_n\}$の初項と一致する。

以上から　$\boldsymbol{a_n=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}(-2)^{n-1}}$

(2)　数列$\{b_n\}$は，1，3，5，7，…… であるから，初項 1，公差 2 の等差数列である。

よって　$b_n=1+(n-1)\cdot 2=2n-1$　　したがって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)=2+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)\cdot n-(n-1)=2+n^2-n-n+1=n^2-2n+3$$

また，$n=1$ のとき，$a_1=1^2-2\cdot1+3=2$ より，数列$\{a_n\}$の初項と一致する。以上から　$\boldsymbol{a_n=n^2-2n+3}$

$$\boldsymbol{S_n}=\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+3)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+3n=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-6(n+1)+18\}$$

$$=\frac{1}{6}n(2n^2+3n+1-6n-6+18)=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(2n^2-3n+13)}$$

$\boxed{6}$　**数列の和と一般項**

初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=2n^2+7n$ で表される数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

要　点

和 S_n と一般項 a_n の関係

数列$\{a_n\}$において，初項 a_1 から第 n 項までの和を S_n とすると　　$\boldsymbol{a_1=S_1,}$　　$\boldsymbol{n\geqq 2}$ **のとき**　$\boldsymbol{a_n=S_n-S_{n-1}}$

解答

$a_1=S_1=2\cdot1^2+7\cdot1=9$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2+7n-\{2(n-1)^2+7(n-1)\}=2n^2+7n-\{2(n^2-2n+1)+7n-7\}$

$=2n^2+7n-(2n^2-4n+2+7n-7)=4n+5$

また，$n=1$ のとき　$a_1=4\cdot1+5=9$　　よって，$a_n=4n+5$ は $n=1$ のときも成り立つ。

以上から　$\boldsymbol{a_n=4n+5}$

$\boxed{7}$　**群数列**

自然数 m が小さい順に m^2 個ずつ並んでいる数列 1，2，2，2，2，3，3，3，3，3，3，3，3，3，4，……

について，次の問いに答えよ。

(1)　7 が最初に現れるのは第何項か。　　(2)　第 200 項を求め，初項から第 200 項までの和を求めよ。

要　点

ある集まりに分けられた数列を**群数列**といいます。例題$\boxed{7}$の数列は，1 を 1 個，2 を 4 個，3 を 9 個，……　の集まりに分けた群数列とみます。

1｜2，2，2，2｜3，3，3，3，3，3，3，3，3｜4，……

1 が 1 個の集まりを第 1 群，2 が 4 個の集まりを第 2 群，……　と呼びます。

群数列では，（数列の第 n 項）⇔（第 N 群の k 番目の項）　と置き換えることがポイントになります。

(1)　7 は第 7 群の最初の項として初めて現れるので，第 1 群から第 6 群までの項の総数を求める。

(2)　第 200 項を，第 N 群の k 番目の項と置き換えるため，第 1 群から第$(N-1)$群までの項の総数が，200 未満で 1 番近くなる $N-1$ を求める。

解答

(1)　与えられた数列を　1｜2，2，2，2｜3，3，3，3，3，3，3，3，3｜4，……　と分けた群数列とみる。

第 1 群から第 6 群までの項の総数は　$\displaystyle\sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{1}{6}\cdot 6\cdot(6+1)(2\cdot 6+1)=91$

よって，7 が最初に現れるのは　**第 92 項**

(2)　第 1 群から第 7 群までの項の総数は　$\displaystyle\sum_{k=1}^{7} k^2 = \frac{1}{6}\cdot 7\cdot(7+1)(2\cdot 7+1)=140$

第 1 群から第 8 群までの項の総数は　$\displaystyle\sum_{k=1}^{8} k^2 = \frac{1}{6}\cdot 8\cdot(8+1)(2\cdot 8+1)=204$

以上のことから，第 200 項は第 8 群の 60 番目の項であることがわかる。よって，第 200 項は　**8**

初項から第 200 項までの和は，第 1 群から第 7 群までの和と 8 を 60 個加えたものである。

第 m 群には m が m^2 個あるので，第 m 群の数の和は m^3 である。よって，第 1 群から第 7 群までの和は

$\displaystyle\sum_{k=1}^{7} k^3 = \left\{\frac{1}{2}\cdot 7\cdot(7+1)\right\}^2 = 784$　　したがって，初項から第 200 項までの和は　$784+8\times 60=$**1264**

$\boxed{8}$　**漸化式**

$a_1=2$，$a_{n+1}=4a_n-3$ ($n=1$，2，3，……)　で定義される数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

要　点

数列の隣り合う項の間の関係式で，これを用いて順に項を定めることができるものを数列の**漸化式**といいます。$a_{n+1}=pa_n+q$ ($n=1$，2，3，……)　型の漸化式では，以下のように一般項を求めます。

a_{n+1}，a_n の代わりに α とおいた方程式 $\alpha=p\alpha+q$（**特性方程式**）に対して，$a_{n+1}=pa_n+q$ と $\alpha=p\alpha+q$ の辺々を引くと　$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$　と変形できる。$a_n-\alpha=b_n$ とおくと $a_{n+1}-\alpha=b_{n+1}$ であるから $b_{n+1}=pb_n$　　これは初項 $b_1=a_1-\alpha$，公比 p の等比数列であるから，数列$\{b_n\}$の一般項　$b_n=(a_1-\alpha)p^{n-1}$ が求まる。これにより数列$\{a_n\}$の一般項　$a_n=(a_1-\alpha)p^{n-1}+\alpha$ が求まる。

〈注意〉漸化式にはいろいろなパターンがあります。「［例題］漸化式」にて，いろいろなパターンの解法を紹介しています。

解答

特性方程式$\alpha=4\alpha-3$から　$\alpha=1$　　よって，$a_{n+1}=4a_n-3$は$a_{n+1}-1=4(a_n-1)$と変形できる。
$a_n-1=b_n$とおくと，$a_{n+1}-1=b_{n+1}$であるから　$b_{n+1}=4b_n$　　ここで，$b_1=a_1-1=2-1=1$より
$b_n=1\cdot 4^{n-1}=4^{n-1}$　　したがって　$\boldsymbol{a_n=4^{n-1}+1}$

$\boxed{9}$　**数学的帰納法**
すべての自然数nについて，6^n-1が5の倍数であることを，数学的帰納法を用いて証明せよ。

要　点

数学的帰納法
自然数nに関する事柄Pが，すべての自然数nについて成り立つことを証明するためには，次のことがいえればよいです。
(ⅰ)　$n=1$のとき，Pが成り立つ。
(ⅱ)　任意の自然数kに対して，$n=k$のときPが成り立つと仮定する。
　このとき，$n=k+1$のときもPが成り立つ。
《補足》上の(ⅰ)，(ⅱ)がいえれば，なぜすべての自然数nについていえたことになるのでしょうか？
(ⅰ)から，$n=1$のときPが成り立つ。(ⅱ)について，$k=1$のときを考えると，$n=1+1=2$のときもPが成り立つ。さらに，(ⅱ)について，$k=2$のときを考えると，$n=3$のときもPが成り立つ。
以下，$n=4$，5，6，…… と，すべての自然数nについてPが成り立つことがいえる。

ある自然数m以上のすべての自然数nについて，事柄Pが成り立つことを証明するためには，次のことがいえればよいです。
(ⅰ)′　$n=m$のとき，Pが成り立つ。
(ⅱ)′　$k\geqq m$である任意の自然数kに対して，$n=k$のときPが成り立つと仮定する。
　このとき，$n=k+1$のときもPが成り立つ。

証明

(ⅰ)　$n=1$のとき，$6^1-1=5$より，5の倍数である。
(ⅱ)　$n=k$のとき，6^k-1が5の倍数であると仮定する。
　このとき，$n=k+1$について考えると

$$6^{k+1}-1=6\cdot 6^k-1=6(6^k-1)+6-1$$
$$=6(6^k-1)+5$$

6^k-1が5の倍数であることが利用できるように式変形をする。

　ここで，6^k-1は5の倍数であるので，自然数mを用いて，$6^k-1=5m$とおける。よって，
　$6(6^k-1)+5=6\cdot 5m+5=5(6m+1)$ から，$6^{k+1}-1$も5の倍数である。
(ⅰ)，(ⅱ)から，すべての自然数nについて，6^n-1は5の倍数である。