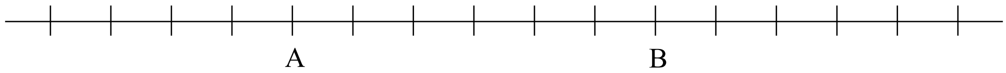
図形の性質

1　内分・外分

線分 AB に対して，次の点を図示せよ。

(1)　2 : 1 に内分する点 P　　(2)　1 : 3 に外分する点 Q

(3)　5 : 2 に外分する点 R　　(4)　中点 M

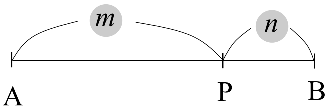


要　点

線分の内分・外分

m，n を正の数とする。

点 P が線分 AB 上にあって，



AP : PB＝m : n

が成り立つとき，点 P は線分 AB を m : n に **内分する** という。

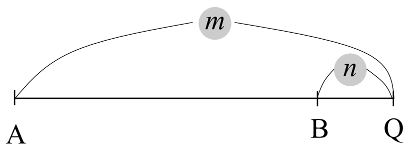
特に，m＝n のとき，点 P は線分 AB の **中点** である。

また，$m \neq n$ で，点 Q が線分 AB の延長上にあって，

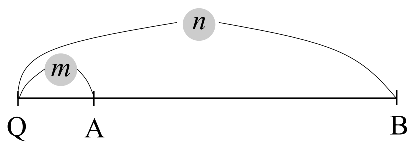
AQ : QB＝m : n

が成り立つとき，点 Q は線分 AB を m : n に **外分する** という。

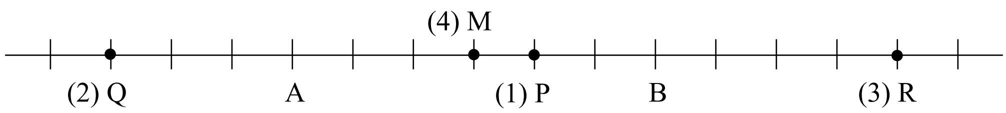
($m>n$ のとき)



($m<n$ のとき)



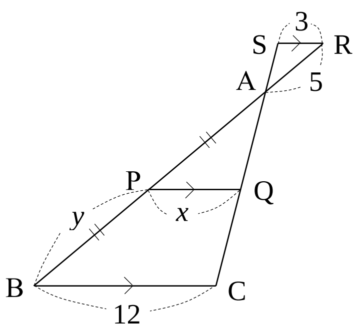
解答



2　平行線と比

右の図において，線分の長さ x，y を求めよ。

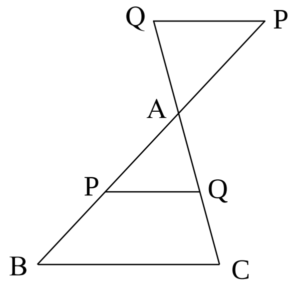
ただし，SR//PQ，PQ//BC，AP＝PB とする。



要　点

平行線と比

△ABC の辺 AB，AC 上，またはそれらの延長上にそれぞれ点 P，Q があるとき



$\boxed{1}$　PQ//BC ならば

AP：AB＝AQ：AC＝PQ：BC

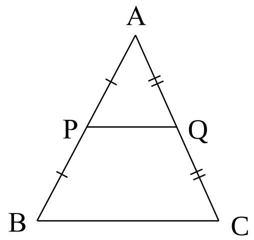
AP：PB＝AQ：QC

$\boxed{2}$　**AP：AB＝AQ：AC ならば　PQ//BC**

AP：PB＝AQ：QC ならば　PQ//BC

中点連結定理

△ABC において，点 P，Q がそれぞれ辺 AB，AC の中点であるとき



PQ//BC，　PQ＝$\frac{1}{2}$BC

解答

PQ＝$\frac{1}{2}$BC から　$x=\frac{1}{2}\cdot 12=\mathbf{6}$

AR：AB＝RS：BC から　5：2y＝3：12

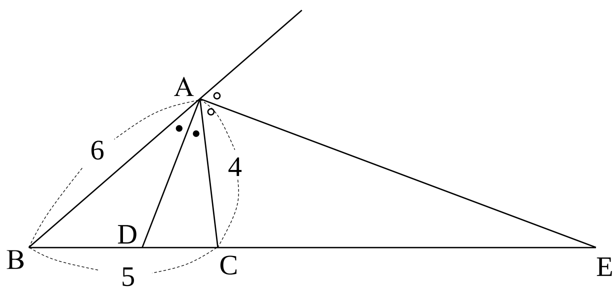
これから　6y＝60　　よって　$\boldsymbol{y=10}$

$\boxed{3}$　**角の二等分線と比**

AB＝6，BC＝5，CA＝4 である△ABC において，∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とし，∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を E とする。

次の線分の長さを求めよ。

(1)　DC　　　　　　(2)　CE

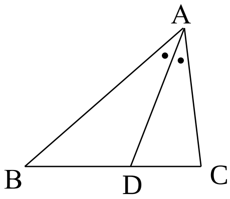


要　点

角の二等分線と比

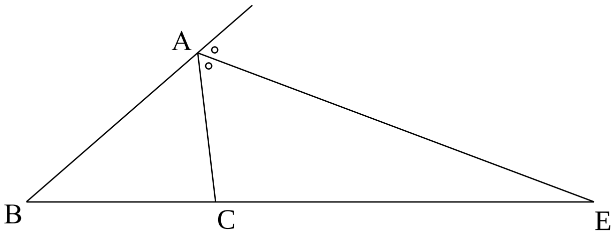
△ABC の∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とすると，D は BC を AB：AC に内分する。

BD：DC＝AB：AC



AB≠AC である△ABC の∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を E とすると，E は BC を AB：AC に外分する。

BE：EC＝AB：AC

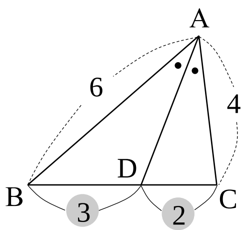


解答

(1)　線分 AD は∠BAC の二等分線であるから

BD：DC＝AB：AC＝6：4＝3：2

よって　DC＝$\frac{2}{5}$BC＝$\frac{2}{5}$×5＝**2**

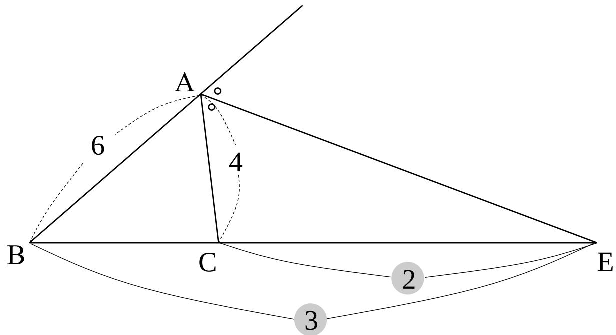


(2)　線分 AE は∠BAC の外角の二等分線であるから

BE：EC＝AB：AC＝6：4＝3：2

よって　BC：CE＝1：2

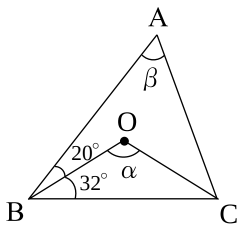
したがって　CE＝2BC＝2×5＝**10**



$\boxed{4}$　**外心**

右の図において，点 O は△ABC の外心である。

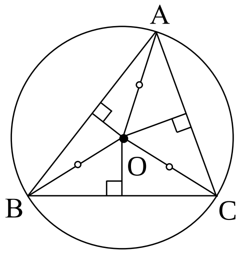
α，β を求めよ。



要　点

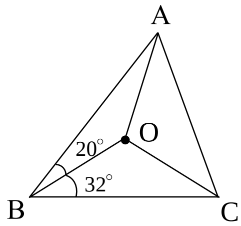
外心

△ABC の 3 つの辺の垂直二等分線は 1 点 O で交わる。
点 O は，△ABC の 3 つの頂点から等距離にあり，点 O を中心に 3 つの頂点を通る円が存在する。
この円を△ABC の **外接円** といい，点 O を△ABC の **外心** という。



解答

∠OBC＝∠OCB，∠OBC＋∠OCB＋∠BOC＝180° から
32° ＋32° ＋ α ＝180°　　よって　$\boldsymbol{\alpha=116^\circ}$
右の図のように，2 点 A，O を結ぶ。
∠OAB＝∠OBA，∠OAC＝∠OCA，
∠OAB＋∠OBA＋∠OBC＋∠OCB＋∠OCA＋∠OAC＝180° から
20° ＋20° ＋32° ＋32° ＋2∠OAC＝180°
よって　∠OAC＝38°
したがって　β ＝∠OAB＋∠OAC＝20° ＋38° **＝58°**



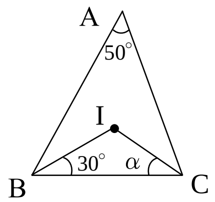
$\boxed{\beta\text{の別解}}$

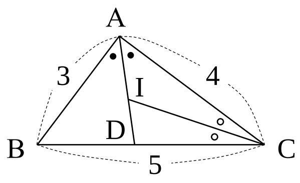
円周角の定理により　$\beta=\dfrac{1}{2}\alpha=\dfrac{1}{2}\times116^\circ=58^\circ$

$\boxed{5}$ **内心**

(1)　右の図において，点 I は△ABC の内心である。
α を求めよ。

(2)　AB＝3，BC＝5，CA＝4 である△ABC において，内心を I，直線 AI と辺 BC との交点を D とするとき，AI : ID を求めよ。

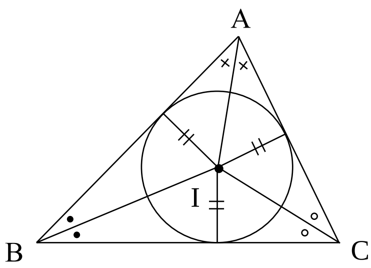




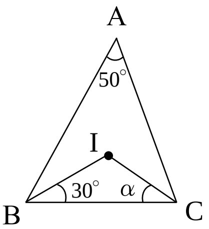
要　点

内心

△ABC の 3 つの内角の二等分線は 1 点 I で交わる。点 I を中心とし，△ABC の 3 つの辺に接する円が存在する。
この円を△ABC の **内接円** といい，点 I を△ABC の **内心** という。



解答



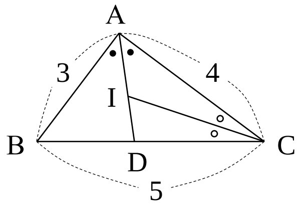
(1)　$\angle\mathrm{IBA}=\angle\mathrm{IBC}=30^\circ$，

$\angle\mathrm{ICB}=\angle\mathrm{ICA}=\alpha$，

$\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{IBA}+\angle\mathrm{IBC}+\angle\mathrm{ICB}+\angle\mathrm{ICA}=180^\circ$ から

$50^\circ+30^\circ+30^\circ+\alpha+\alpha=180^\circ$

よって　$\boldsymbol{\alpha=35^\circ}$



(2)　直線 AI は∠A の二等分線であるから

$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=3:4$

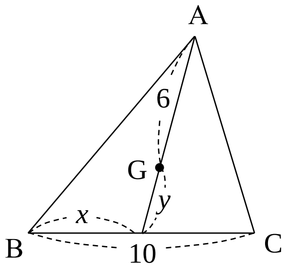
よって　$\mathrm{DC}=\frac{4}{7}\mathrm{BC}=\frac{4}{7}\times5=\frac{20}{7}$

また，直線 CI は∠C の二等分線であるから

$\mathbf{AI}:\mathbf{ID}=\mathrm{CA}:\mathrm{CD}=4:\frac{20}{7}\mathbf{=7:5}$

6　重心

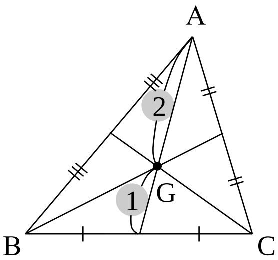
右の図において，点 G は△ABC の重心である。
線分の長さ x，y を求めよ。



要　点

重心

△ABC の 3 つの中線は，1 点 G で交わる。
点 G を△ABC の **重心** という。
点 G は，中線を 2 : 1 に内分する。



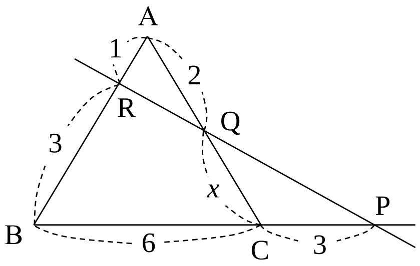
解答

$\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}\cdot10\mathbf{=5}$

$6:y=2:1$ から　$2y=6$　　　$\boldsymbol{y=3}$

7　**メネラウスの定理**

右の図において，線分の長さ x を求めよ。

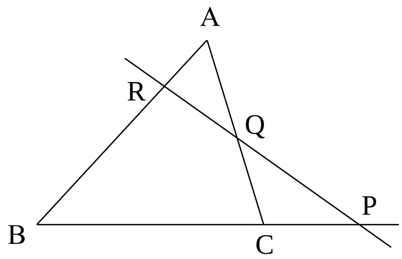


要　点

メネラウスの定理

△ABC の 3 辺 BC，CA，AB 上，またはそれらの延長上にそれぞれ三角形の頂点と異なる点 P，Q，R がある。3 点 P，Q，R が一直線上にあるならば

$$\frac{\mathbf{BP}}{\mathbf{PC}}\cdot\frac{\mathbf{CQ}}{\mathbf{QA}}\cdot\frac{\mathbf{AR}}{\mathbf{RB}}=\mathbf{1}$$



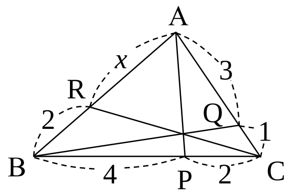
解答

メネラウスの定理により　$\frac{6+3}{3}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{3}=1$

よって　$\boldsymbol{x=2}$

8　**チェバの定理**

右の図において，線分の長さ x を求めよ。



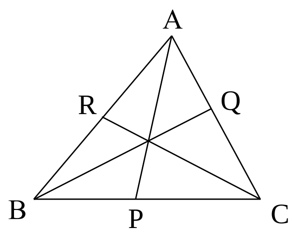
要　点

チェバの定理

△ABC の 3 辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 P，Q，R がある。

3 直線 AP，BQ，CR が 1 点で交わるならば

$$\frac{\mathbf{BP}}{\mathbf{PC}}\cdot\frac{\mathbf{CQ}}{\mathbf{QA}}\cdot\frac{\mathbf{AR}}{\mathbf{RB}}=\mathbf{1}$$



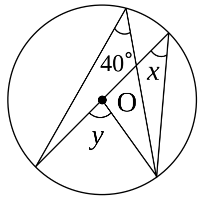
解答

チェバの定理により　$\dfrac{4}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{x}{2}=1$

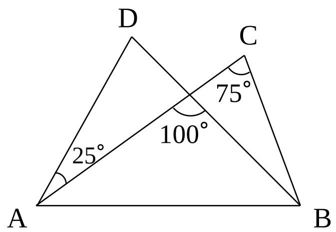
よって　$\boldsymbol{x=3}$

9　円周角の定理

(1)　右の図において，x，y を求めよ。
ただし，点 O は円の中心とする。



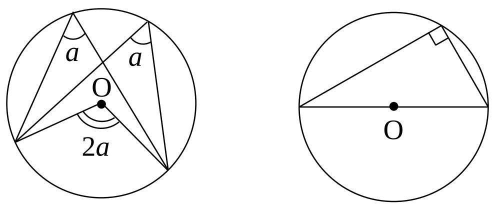
(2)　右の図において，4 点 A，B，C，D は同一円周上にあるといえるか。



要　点

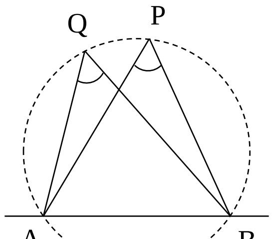
円周角の定理

1 つの弧に対する円周角の大きさは一定であり，その弧に対する中心角の半分である。
特に，半円に対する円周角は 90° に等しい。



円周角の定理の逆

2 点 P，Q が直線 AB に関して同じ側にあって，∠APB＝∠AQB が成り立つならば，4 点 A，B，P，Q は同一円周上にある。



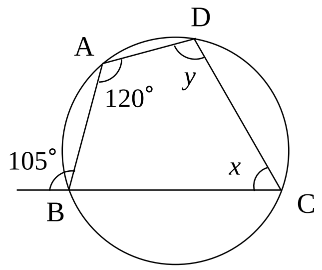
解答

(1)　1 つの弧に対する円周角の大きさは等しいから　$\boldsymbol{x=40^\circ}$
　1 つの弧に対する中心角の大きさは，その弧に対する円周角の 2 倍であるから
　　$y=2\times40^\circ$ $\boldsymbol{=80^\circ}$

(2)　∠ADB＝100° －25° ＝75° であるから　∠ACB＝∠ADB
　よって，円周角の定理の逆により，**4 点 A，B，C，D は同一円周上にある。**

１０　**円に内接する四角形の性質**

右の図において，x，y を求めよ。



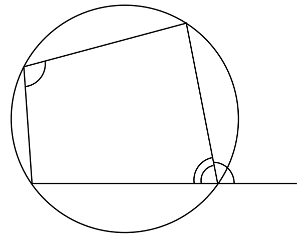
要　点

円に内接する四角形の性質

四角形が円に内接するとき

1　対角の和は 180°である。

2　外角は，それと隣り合う内角の対角に等しい。



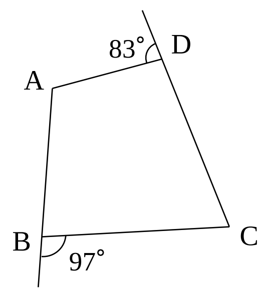
解答

120°＋x＝180°より　$\boldsymbol{x=60°}$

$\boldsymbol{y=105°}$

１１　**四角形が円に内接する条件**

右の四角形 ABCD は，円に内接するか。



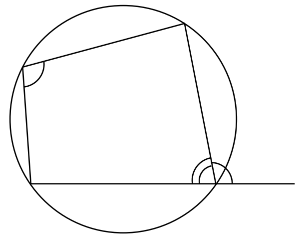
要　点

四角形が円に内接する条件

次の 1，2 のいずれかが成り立つ四角形は，円に内接する。

1　1 組の対角の和が 180°である。

2　1 つの外角が，それと隣り合う内角の対角に等しい。



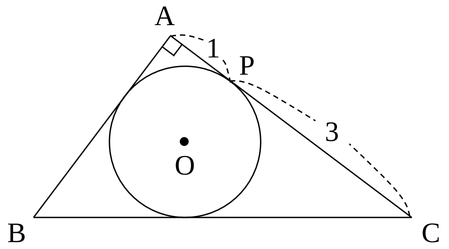
解答

∠ADC＝180°－83°＝97°

よって，1 つの外角が，それと隣り合う内角の対角に等しいから，**四角形 ABCD は円に内接する。**

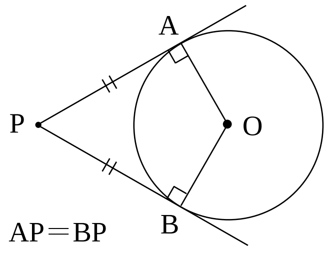
１２　**円の接線の性質**

右の図において，円 O は∠A＝90° の直角三角形 ABC の内接円，点 P は辺 AC と円 O との接点である。
AP＝1，CP＝3 のとき，辺 AB，BC の長さを求めよ。



要　点

円外の点からその円に接線を引くとき，その点から 2 つの接点までの距離は等しい。



解答

円 O と辺 AB，BC の接点をそれぞれ Q，R とすると

AQ＝AP＝1

CR＝CP＝3

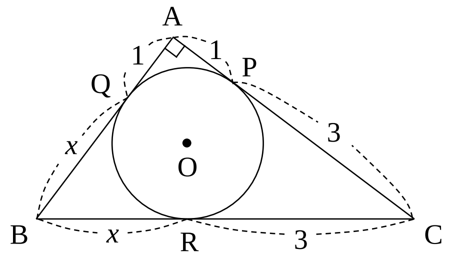
ここで，BQ＝BR＝x とおく。

△ABC において，三平方の定理により

$(1+x)^2+4^2=(x+3)^2$　　$1+2x+x^2+16=x^2+6x+9$

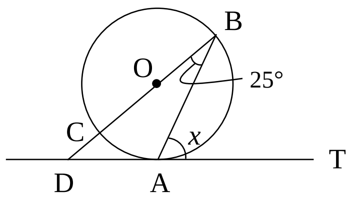
$-4x=-8$　　$x=2$

したがって　**AB＝3，BC＝5**



１３　**円の接線と弦の作る角**

右の図において，直線 AT は円 O の点 A における接線である。x を求めよ。

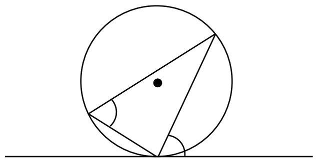


要　点

円の接線と弦の作る角

円の接線と接点を通る弦の作る角は，
この角の内部にある弧に対する円周角
に等しい。

〈注意〉これを，**接弦定理** とよぶこともある。



解答

点 A，C を結ぶ。

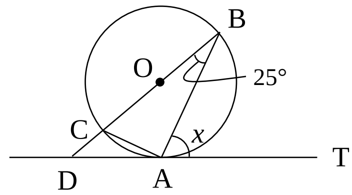
このとき，円の接線と弦の作る角の定理により　x＝∠ACB

また，線分 BC は円の直径であるから　∠BAC＝90°

よって，△ABC において

　　∠ACB＋∠CBA＋∠BAC＝180°

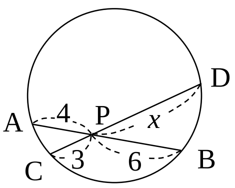
すなわち　x＋25°＋90°＝180°　　　したがって　$\boldsymbol{x=65°}$



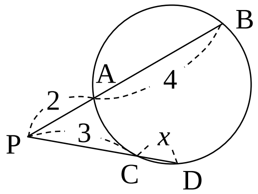
１４　**方べきの定理**

次の図において，x の値を求めよ。ただし，(3)の直線 PT は接点を T とする円の接線である。

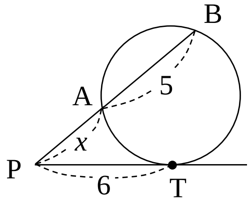
(1)



(2)



(3)



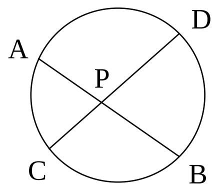
要　点

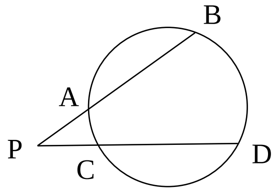
方べきの定理

円の 2 つの弦 AB，CD，またはそれらの延長が

点 P で交わるとき

　　PA・PB＝PC・PD

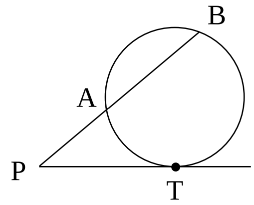




円の弦 AB の延長上の点 P から，この円に引いた

接線の接点を T とするとき

　　PA・PB＝PT²



解答

(1)　PA・PB＝PC・PD から　4・6＝3・x

　　よって　$\boldsymbol{x=8}$

(2)　PA・PB＝PC・PD から　2・(2＋4)＝3・(3＋x)

　　よって　$\boldsymbol{x=1}$

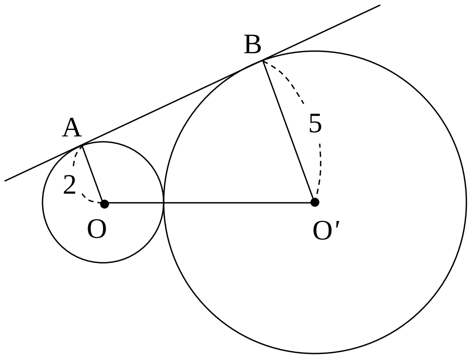
(3)　PA・PB＝PT^2 から　$x(x+5)=6^2$

　　よって　$x^2+5x-36=0$　　　$(x+9)(x-4)=0$

　　$x>0$ より　$\boldsymbol{x=4}$

１５　２つの円の共通接線

右の図において，直線 AB は 2 つの外接する円 O，O′ の共通接線で，点 A，B が接点である。
線分 AB の長さを求めよ。



要　点

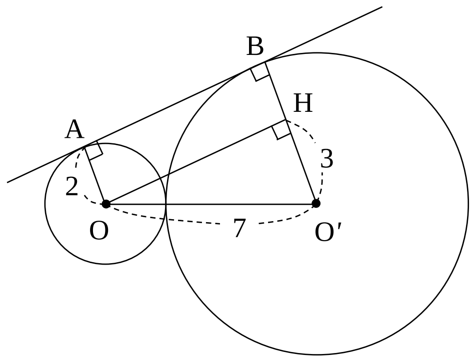
AB⊥OA，AB⊥O′B から，OA//O′B である。
線分 AB を平行移動し，線分 OO′ を斜辺とする直角三角形を作る。

解答

点 O から線分 O′B に垂線 OH を引く。
OA⊥AB，O′B⊥AB であるから，四角形 AOHB は長方形である。よって　AB＝OH，OA＝HB
また　O′H＝O′B－HB＝5－2＝3
　　　OO′＝2＋5＝7
直角三角形 OO′H において，三平方の定理により

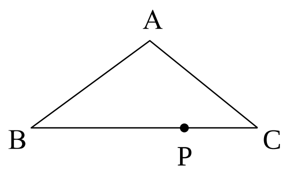
$$OH=\sqrt{OO'^2-O'H^2}=\sqrt{7^2-3^2}=2\sqrt{10}$$

したがって　**AB＝OH＝2$\sqrt{10}$**



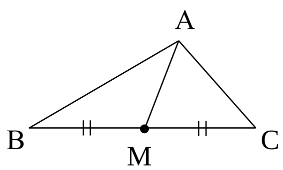
１６　作図（等積変形）

△ABC と辺 BC 上の点 P が与えられている。
点 P を通り，△ABC の面積を 2 等分する直線を作図せよ。

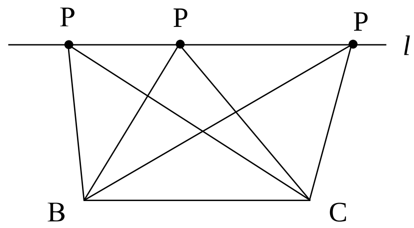


要　点

・△ABC の辺 BC の中点 M をとると
　　△ABM＝△ACM



・線分 BC と，それに平行な直線 l がある。
　l 上の点 P と線分 BC からなる△PBC の面積は一定である。



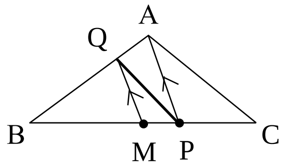
これらを利用する。

作図

① 辺 BC の中点 M をとる。

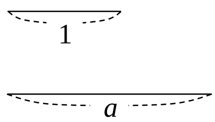
② 点 M を通り，直線 AP に平行な直線と，
辺 BC との交点を Q とする。

③ 点 P と点 Q を結んだ直線 PQ が求める
直線である。



１７ **線分の作図**

(1) 長さ 1，a の線分が与えられているとき，
長さ a^2 の線分を作図せよ。



(2) 長さ 1 の線分が与えられているとき，長さ $\sqrt{7}$ の線分を作図せよ。

要　点

(1) 三角形の相似（平行線と比の性質）を利用する。

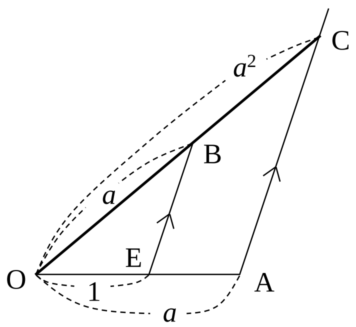
(2) 方べきの定理を利用する。

作図

(1) ① 長さ a の線分 OA 上に OE＝1
を満たす点 E をとる。

② OB＝a を満たす点 B を直線 OA
の外にとる。

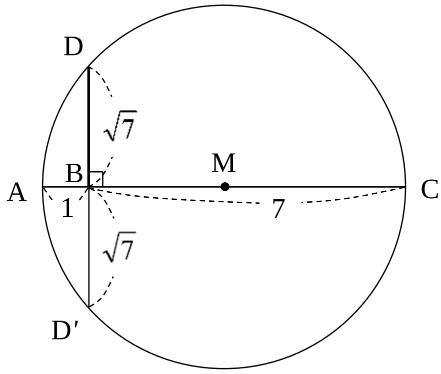
③ 点 A を通り，直線 EB に平行な
直線を引き，線分 OB の延長との
交点を C とする。このとき，
OE：OA＝OB：OC から，線分 OC
の長さが a^2 となる。



(2) ① 同一直線上に AB＝1，BC＝7 と
なるような 3 点 A，B，C を，この
順にとる。

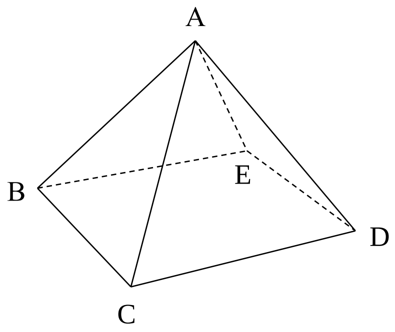
② 線分 AC の中点を M とし，M を
中心とする半径 AM の円をかく。

③ 点 B を通り，直線 AC に垂直な
直線と，②でかいた円との交点を
D，D′ とする。このとき，
AB・BC＝BD・BD′，BD＝BD′ より，
線分 BD および BD′ の長さが $\sqrt{7}$ である。



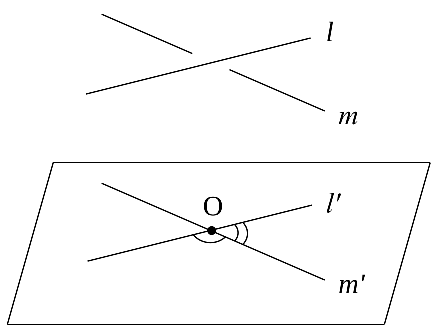
１８　**2 直線の位置関係**

右の図のような 1 辺が 1 である正四角錐 A-BCDE において，2 直線 AB と ED のなす角を求めよ。



要　点

2 直線 l，m が平行でないとき，1 点 O を通り，l，m にそれぞれ平行な直線を l'，m' とする。
このとき，l'，m' のなす角は，点 O をどこにとっても変わらない。
この角を 2 直線 l，m のなす角という。



解答

ED//BC より，2 直線 AB と ED のなす角は，2 直線 AB と BC のなす角と同じである。
よって　**60°**

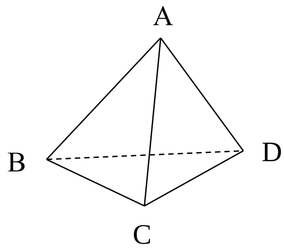
１９　**直線と平面の位置関係**

次の問いに答えよ。

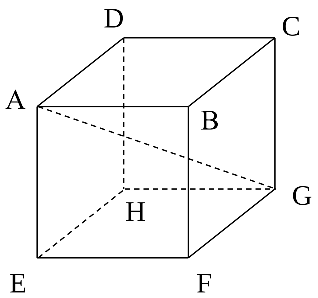
(1)　正四面体 ABCD において，

$$AB \perp CD$$

であることを示せ。



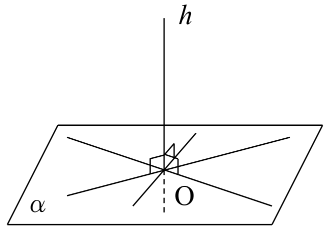
(2)　右の図のような，1 辺が長さが 1 の立方体 ABCD-EFGH において，直線 AG と平面 EFGH のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。



要　点

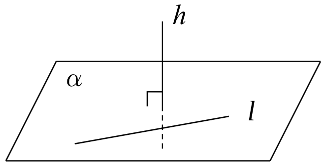
直線と平面の垂直条件

直線 h が平面 α と点 O で交わっていて，O を通る α 上のすべての直線に垂直であるとき，直線 h は平面 α に垂直であるといい，$h\perp\alpha$ で表す。
また，直線 h を平面 α の垂線という。

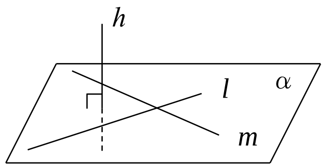


直線と平面の垂直について，次のことが成り立つ。

$\boxed{1}$　直線 h が平面 α に垂直であれば，h は α 上のすべての直線に垂直である。

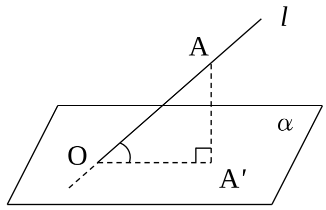


$\boxed{2}$　交わる 2 直線 l，m のいずれにも垂直な直線 h は，2 直線 l，m の定める平面 α に垂直である。



直線と平面のなす角

右の図のように，直線 l と平面 α が点 O で交わるとき，l 上の O 以外の点 A から α に垂線 AA′ を引く。このとき，∠AOA′ の大きさは，点 A をどこにとっても変わらない。この角を，直線 l と平面 α のなす角という。
特に，点 A′ が点 O に一致するとき，l と α のなす角は直角になる。



解答

(1)　辺 CD の中点を M とする。

△ACD は AC＝AD の二等辺三角形と考えることができる。

よって　AM⊥CD　　……①

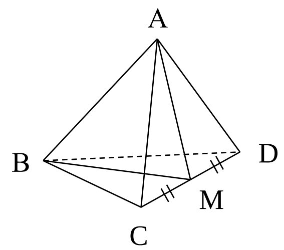
△BCD においても同様に考えると

BM⊥CD　　……②

①，②から　CD⊥平面 ABM

ここで，辺 AB は平面 ABM 上にあるから

AB⊥CD



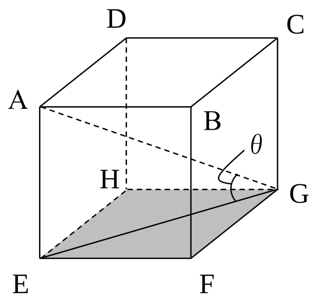
(2)　直線 AG は平面 EFGH と点 G で交わる。

また，点 A から平面 EFGH に引いた垂線は AE であるから

$\theta=\angle\mathrm{AGE}$

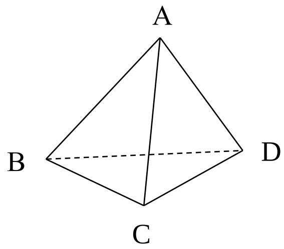
ここで，AE＝1，EG＝$\sqrt{2}$ であるから　AG＝$\sqrt{3}$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$



２０　2 平面の位置関係

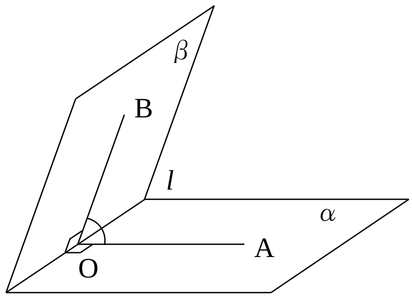
1 辺の長さが 1 の正四面体 ABCD において，
平面 ACD と平面 BCD のなす角を θ とする
とき，$\cos\theta$ の値を求めよ。



要　点

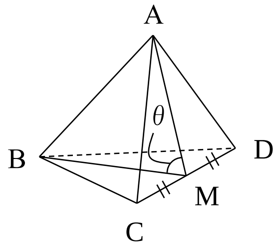
2 平面のなす角

異なる 2 平面 α，β が交わるとき，その交線を l とする。
l 上の 1 点 O を通り，l に垂直な直線 OA，OB をそれぞれ
α，β 上に引くと，OA，OB のなす角は，O を l 上のどこ
にとっても変わらない。
この角を 2 平面 α，β のなす角という。



解答

平面 ACD と平面 BCD の交線は直線 CD である。
辺 CD の中点を M とする。
△ACD は AC＝AD の二等辺三角形と考えること
ができる。よって　AM⊥CD
△BCD においても同様に考えると　BM⊥CD
したがって　$\theta=\angle\mathrm{AMB}$



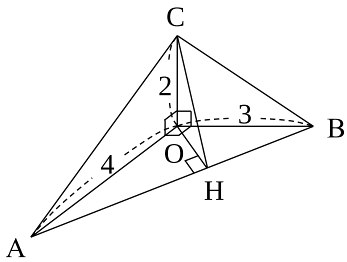
ここで，AB＝1，AM＝BM＝$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2-\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{AM}\cdot\mathrm{BM}}=\frac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1^2}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{3}{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

２１　三垂線の定理

互いに垂直な線分 OA，OB，OC があり，OA＝4，OB＝3，
OC＝2 である。点 O から線分 AB に垂線 OH を引くとき，
次の問いに答えよ。

(1)　線分 OH の長さを求めよ。
(2)　線分 CH の長さを求めよ。
(3)　△ABC の面積を求めよ。

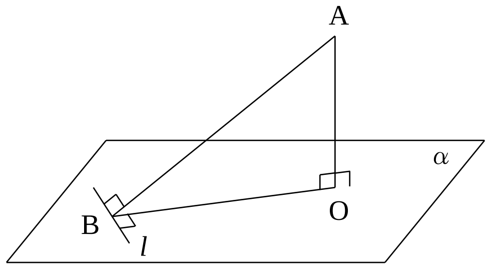


要　点

1　**AO⊥α，OB⊥l ならば　AB⊥l**

2　**AO⊥α，AB⊥l ならば　OB⊥l**

3　**AB⊥l，OB⊥l，AO⊥OB**
ならば　AO⊥α



解答

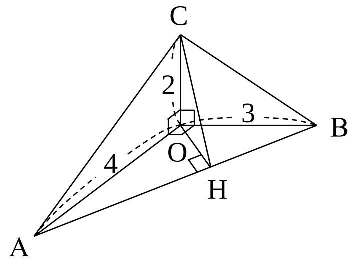
(1)　△OAB の面積に着目すると

$$\frac{1}{2}\times\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}=\frac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{OH}\quad\cdots\cdots①$$

OA＝4，OB＝3，AB＝$\sqrt{3^2+4^2}=5$ であるから

①より　$\frac{1}{2}\times4\times3=\frac{1}{2}\times5\times\mathrm{OH}$

よって　OH＝$\boldsymbol{\frac{12}{5}}$



(2)　△OCH は∠COH＝90° の直角三角形であるから

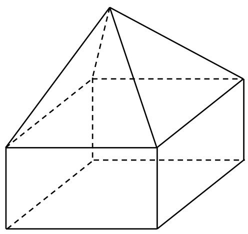
$$\mathrm{CH}=\sqrt{\mathrm{OC}^2+\mathrm{OH}^2}=\sqrt{2^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{61}}{5}}$$

(3)　OC⊥平面 OAB，OH⊥AB であるから，三垂線の定理により　CH⊥AB
したがって，△ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{CH}=\frac{1}{2}\times5\times\frac{2\sqrt{61}}{5}=\boldsymbol{\sqrt{61}}$$

２２　**オイラーの多面体定理**

右の図のような多面体において，
オイラーの多面体定理が成り立つ
ことを確かめよ。



要　点

オイラーの多面体定理

へこみのない多面体において，頂点の数を v，辺の数を e，面の数を f とすると

$$\boldsymbol{v-e+f=2}$$

解答

頂点の数 v は　9 個

辺の数 e は　　16 本

面の数 f は　　9 個

であるから　$v-e+f=9-16+9=2$

よって，**オイラーの多面体定理は成り立つ。**

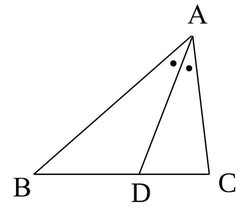
研究　**三角形の辺と角**

次の問いに答えよ。

(1)　△ABC において，∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，

　　　　AB＞BD

　であることを証明せよ。



(2)　3 辺の長さが次のような三角形は存在するかどうかを調べよ。

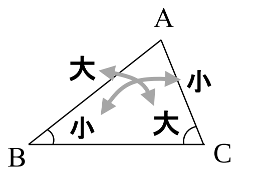
　①　2，3，4　　　　　　　　　　　　　②　1，3，5

要　点

辺の大小と対角の大小

△ABC において

　　$AB>AC \iff \angle C>\angle B$



三角形の辺の長さの関係

三角形の 2 辺の長さの和は，残りの 1 辺の長さより大きい。

すなわち，正の実数 a，b，c が，$a+b>c$ かつ $b+c>a$ かつ $c+a>b$ を満たす。

　　　　$\iff$ 正の実数 a，b，c を 3 辺の長さにもつ三角形が存在する。

解答

(1)　直線 AD は∠BAC の二等分線であるから

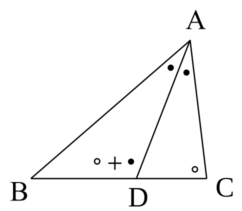
　　　　$\angle BAD=\angle CAD$　　　　……①

　一方，∠ADB は△ADC の外角であるから

　　　　$\angle ADB=\angle ACD+\angle CAD$　　……②

　よって，①，②から　$\angle ADB>\angle BAD$

　したがって，三角形の辺と角の大小関係により　AB＞BD



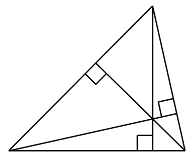
(2)　①　$2+3>4$，$3+4>2$，$4+2>3$

　　　であるから，3 辺の長さが 2，3，4 の三角形は**存在する。**

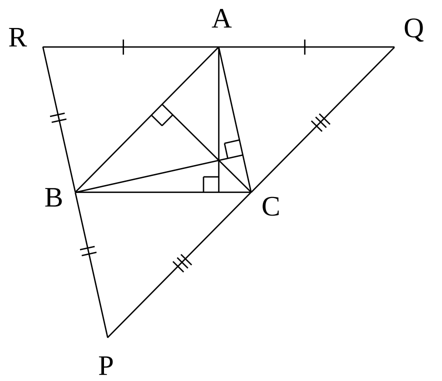
　②　$5>1+3$ であるから，3 辺の長さが 1，3，5 の三角形は**存在しない。**

参考１　**垂心**

三角形の各頂点から，それぞれの対辺またはその
延長上に引いた 3 本の垂線は 1 点で交わる。



証明



△ABC において，各頂点から対辺またはその延長上に
垂線を引く。また，頂点 B，C，A を通り，それぞれ
対辺に平行な直線を引き，それらの交点を，図のよう
に P，Q，R とする。
四角形 ARBC，四角形 ABCQ はいずれも平行四辺形で
あるから

BC＝RA，BC＝AQ

よって　RA＝AQ
また，BC//RQ であるから，線分 RQ の垂直二等分線は，頂点 A からその対辺に引いた垂線と一致する。
同様にして, 線分 PR, QP の垂直二等分線は, それぞれ頂点 B, C からその対辺に引いた垂線と一致する。
ここで，△PQR の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる。
すなわち，△ABC の 3 本の垂線は 1 点で交わる。

三角形の 3 本の垂線の交点を，三角形の **垂心** という。

参考２　**傍心**

△ABC の 1 つの内角の二等分線と，残り 2 つの外角の二等分線
は 1 点で交わる。この点は 3 直線 AB，BC，CA から等距離に
あるから，その点を中心として 3 直線 AB，BC，CA に接する
円をかくことができる。
右の図の円を∠A に対する **傍接円** といい，この円の中心 J を
傍心 という。
同様に，∠B，∠C に対する傍心と傍接円も存在する。