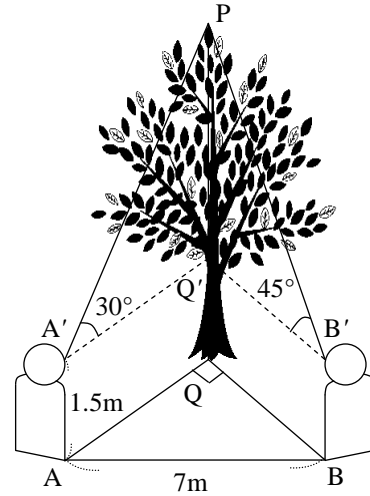


## 図形と計量

### 1 直角三角形と三角比

木の先端を P、根元を Q とする。A 地点の目の位置 A' から木の先端への仰角が  $30^\circ$ 、A から 7m 離れた  $\angle AQB = 90^\circ$  となる B 地点の目の位置 B' から木の先端への仰角が  $45^\circ$  であるとき、木の高さを求めよ。ただし、目の高さを 1.5m とし、Q' を右の図のように定める。



### 要 点

- ・  $PQ' = x$  とおき、 $A'Q'$ 、 $B'Q'$  を  $x$  を用いて表し、 $\frac{PQ'}{A'Q'} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 、 $\frac{PQ'}{B'Q'} = \tan 45^\circ = 1$  を利用します。
- ・  $\triangle A'Q'B'$  において、三平方の定理を用いて  $x$  を求めます。

### 解答

$PQ' = x$  とおく。  $\angle PA'Q' = 30^\circ$  より  $\frac{PQ'}{A'Q'} = \tan 30^\circ$ 、 $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$  であるので  $A'Q' = \sqrt{3}x$

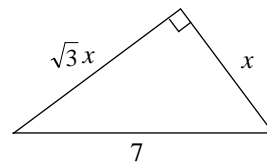
$\angle PB'Q' = 45^\circ$  より  $\frac{PQ'}{B'Q'} = \tan 45^\circ$ 、 $\tan 45^\circ = 1$  であるので  $B'Q' = x$

$\triangle A'Q'B'$  は直角三角形なので、三平方の定理により

$$(\sqrt{3}x)^2 + x^2 = 7^2 \quad x^2 = \frac{49}{4}$$

$x > 0$  より  $x = \frac{7}{2} = 3.5$

したがって、木の高さは  $3.5 + 1.5 = 5\text{m}$



### 2 $90^\circ - \theta$ 、 $180^\circ - \theta$ の三角比

(1) 次の三角比を  $45^\circ$  より小さい角の三角比で表せ。

①  $\sin 70^\circ$

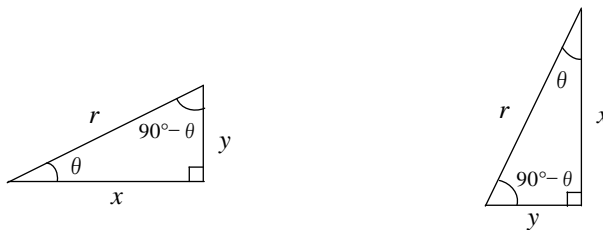
②  $\cos 165^\circ$

③  $\tan 130^\circ$

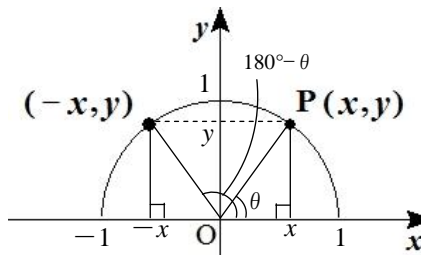
(2)  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  のとき、 $\sin(90^\circ + \theta)$ 、 $\cos(90^\circ + \theta)$ 、 $\tan(90^\circ + \theta)$  を、 $\theta$  の三角比で表せ。

要 点

$$\begin{cases} \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta \\ \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta \\ \tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta \\ \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta \\ \tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta \end{cases}$$



解答

- (1) ①  $90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$  であるから  $\sin 70^\circ = \sin(90^\circ - 20^\circ) = \cos 20^\circ$   
 ②  $165^\circ = 180^\circ - 15^\circ$  であるから  $\cos 165^\circ = \cos(180^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ$   
 ③  $130^\circ = 180^\circ - 50^\circ$  であり,  $50^\circ = 90^\circ - 40^\circ$  であるから

$$\tan 130^\circ = \tan(180^\circ - 50^\circ) = -\tan 50^\circ = -\tan(90^\circ - 40^\circ) = -\frac{1}{\tan 40^\circ}$$

- (2)  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  のとき,  $90^\circ + \theta$  は鈍角になるから  $180^\circ - (90^\circ + \theta)$  を考える。

$$180^\circ - (90^\circ + \theta) = 90^\circ - \theta \text{ であるから } \sin(90^\circ + \theta) = \sin\{180^\circ - (90^\circ + \theta)\} = \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ + \theta) = -\cos\{180^\circ - (90^\circ + \theta)\} = -\cos(90^\circ - \theta) = -\sin \theta$$

$$\tan(90^\circ + \theta) = -\tan\{180^\circ - (90^\circ + \theta)\} = -\tan(90^\circ - \theta) = -\frac{1}{\tan \theta}$$

3 三角比の相互関係

- (1)  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  とする。  $\cos \theta = \frac{2}{7}$  のとき,  $\sin \theta$  と  $\tan \theta$  の値を求めよ。  
 (2)  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  とする。  $\sin \theta = \frac{1}{3}$  のとき,  $\cos \theta$  と  $\tan \theta$  の値を求めよ。  
 (3)  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  とする。  $\tan \theta = -2$  のとき,  $\sin \theta$  と  $\cos \theta$  の値を求めよ。

要 点

次の三角比の相互関係を用います。

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  とする。ただし,  $\tan \theta$  では  $\theta \neq 90^\circ$  とする。

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \qquad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \qquad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

**解答**

(1)  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  から  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{45}{49}$        $\sin \theta > 0$  であるから  $\sin \theta = \frac{3\sqrt{5}}{7}$

また  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3\sqrt{5}}{7} \div \frac{2}{7} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

(2)  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  から  $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$

(i)  $\cos \theta > 0$  のとき

$\cos \theta = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$       また  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{3} \div \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

(ii)  $\cos \theta < 0$  のとき

$\cos \theta = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$       また  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{3} \div \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

(i), (ii) から  $(\cos \theta, \tan \theta) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right), \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

(3)  $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$  から  $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + (-2)^2 = 5$        $\cos^2 \theta = \frac{1}{5}$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ,  $\tan \theta = -2 < 0$  であるから  $90^\circ < \theta < 180^\circ$       よって  $\cos \theta < 0$

したがって  $\cos \theta = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$       また  $\sin \theta = \tan \theta \cdot \cos \theta = (-2) \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

**4 三角方程式・三角不等式**

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき、次の問いに答えよ。

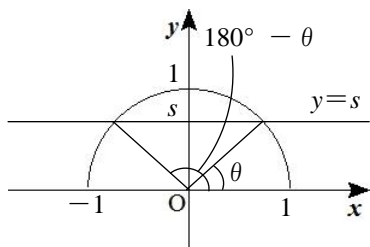
(1) 等式  $2\sin \theta = \sqrt{3}$  を満たす  $\theta$  を求めよ。

(2) 不等式  $2\sin \theta > \sqrt{3}$  を満たす  $\theta$  の範囲を求めよ。

**要 点**

角  $\theta$  の三角比の値から、角  $\theta$  ( $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ) を求めることができます。

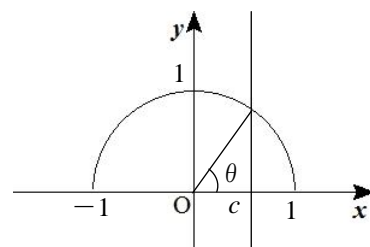
①  $\sin \theta = s$  を満たす  $\theta$



$0 \leq s < 1$  なら  $\theta, 180^\circ - \theta$

$s = 1$  なら  $\theta = 90^\circ$

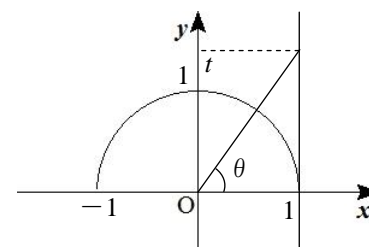
②  $\cos \theta = c$  を満たす  $\theta$



$-1 \leq c \leq 1$

$\theta$  はただ 1 つ

③  $\tan \theta = t$  を満たす  $\theta$



$t \neq 0$  のとき、 $\theta$  はただ 1 つ

$t = 0$  なら  $\theta = 0^\circ, 180^\circ$

**解答**

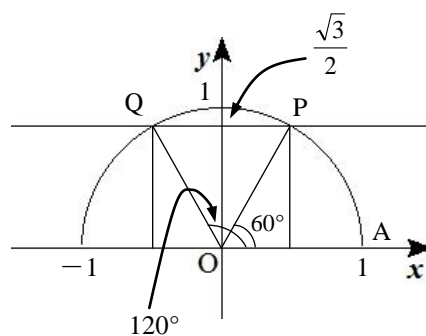
(1)  $2\sin\theta = \sqrt{3}$  から  $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

半径 1 の円周上で、y 座標が  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  となる

点は、右の図の 2 点 P, Q である。

求める  $\theta$  は、 $\angle AOP$  と  $\angle AOQ$  である

から  $\theta = 60^\circ, 120^\circ$



(2)  $2\sin\theta > \sqrt{3}$  から  $\sin\theta > \frac{\sqrt{3}}{2}$

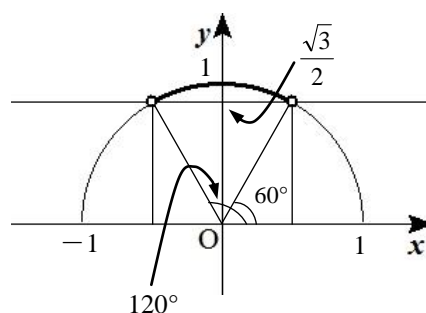
(1)より、 $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$  を満たす  $\theta$  は

$\theta = 60^\circ, 120^\circ$

よって、右の図から  $\sin\theta > \frac{\sqrt{3}}{2}$  を

満たす  $\theta$  の範囲は

$60^\circ < \theta < 120^\circ$



**5** 三角比の対称式の値

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  ,  $\sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$  のとき、次の値を求めよ。

(1)  $\sin\theta \cos\theta$

(2)  $\sin\theta - \cos\theta$

(3)  $\tan\theta$

**要 点**

(1)  $\sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$  の両辺を 2 乗します。

(2) まず、 $(\sin\theta - \cos\theta)^2$  の値を求めます。

(3)  $\sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$  と(2)から、 $\sin\theta$  ,  $\cos\theta$  を求めます。

**解答**

(1)  $\sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$  の両辺を 2 乗すると  $\sin^2\theta + 2\sin\theta \cos\theta + \cos^2\theta = \frac{3}{4}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$  から  $1 + 2\sin\theta \cos\theta = \frac{3}{4}$

よって、 $2\sin\theta \cos\theta = -\frac{1}{4}$  から  $\sin\theta \cos\theta = -\frac{1}{8}$

(2)  $(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ , (1)から  $\sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{8}$  であるから  $(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{5}{4}$

ここで,  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき  $\sin \theta \geq 0$  であることと,  $\sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{8} < 0$  から  $\cos \theta < 0$

よって,  $\sin \theta - \cos \theta > 0$  である。したがって  $\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

(3) 条件と(2)から 
$$\begin{cases} \sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \quad \text{これを解くと} \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{4}, \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{4}$$

よって  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{4}}{\frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{4}} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2}{(\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5})} = \frac{8 + 2\sqrt{15}}{3 - 5} = -4 - \sqrt{5}$

**6** 三角比の2次関数の最大・最小

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき,  $y = \cos^2 \theta + \sin \theta$  の最大値, 最小値を求めよ。また, そのときの  $\theta$  の値を求めよ。

**要 点**

- ①  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  を利用して, 関数を1つの三角比で表します。
- ②  $\sin \theta = t$  (または  $\cos \theta = t$ ) とおき, 変域に注意して2次関数のグラフをかきます。

**解答**

$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$  より  $y = \cos^2 \theta + \sin \theta = 1 - \sin^2 \theta + \sin \theta = -\sin^2 \theta + \sin \theta + 1$

$\sin \theta = t$  とおくと,  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき  $0 \leq \sin \theta \leq 1$  であるから  $0 \leq t \leq 1$

$y$  を  $t$  を用いて表すと

$$y = -t^2 + t + 1 = -(t^2 - t) + 1 = -\left\{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right\} + 1 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} + 1 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

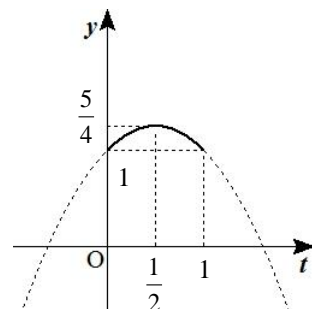
$t = \frac{1}{2}$  で最大値  $\frac{5}{4}$ ,  $t = 0, 1$  で最小値 1 をとる。

$t = \frac{1}{2}$  すなわち  $\sin \theta = \frac{1}{2}$  を満たす  $\theta$  は  $\theta = 30^\circ, 150^\circ$

$t = 0$  すなわち  $\sin \theta = 0$  を満たす  $\theta$  は  $\theta = 0^\circ, 180^\circ$

$t = 1$  すなわち  $\sin \theta = 1$  を満たす  $\theta$  は  $\theta = 90^\circ$

よって,  $\theta = 30^\circ, 150^\circ$  のとき最大値  $\frac{5}{4}$ ,  $\theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  のとき最小値 1



**7** 正弦定理・余弦定理

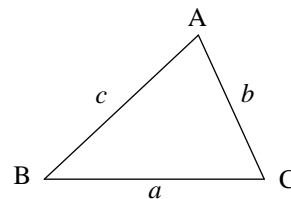
△ABCにおいて、辺BC, CA, ABの長さをそれぞれ  $a, b, c$ ,  
 $\angle A, \angle B, \angle C$ の大きさをそれぞれ  $A, B, C$ で表すことにする。

(1) △ABCにおいて、次のものを求めよ。

①  $A=60^\circ, B=45^\circ, a=2$  のとき,  $b$  および外接円の半径  $R$

②  $a=3, B=60^\circ, c=4$  のとき  $b$

(2) △ABCにおいて,  $B=45^\circ, b=\sqrt{3}, c=3$  のとき,  $a, A, C$  を求めよ。



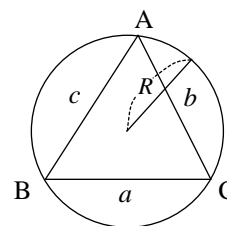
**要 点**

正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



**解答**

(1) ① 正弦定理により,  $\frac{2}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}$  から  $\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

よって  $b = \left(2 \div \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

また, 正弦定理により  $2R = \frac{2}{\sin 60^\circ}$  から  $2R = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

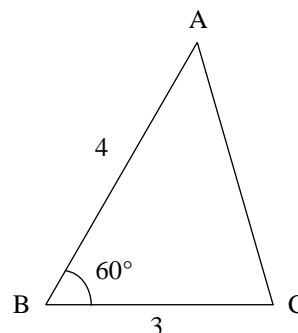
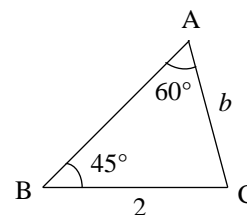
よって  $R = \left(2 \div \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{1}{2} = 2 \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

② 余弦定理により

$$b^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ$$

$$= 16 + 9 - 24 \cdot \frac{1}{2} = 13$$

$$b > 0 \text{ から } b = \sqrt{13}$$



(2) 正弦定理により

$$\frac{\sqrt{6}}{\sin 45^\circ} = \frac{3}{\sin C} \text{ から } \frac{\sqrt{6}}{1} = \frac{3}{\sin C}$$

$$\text{よって } \sin C = 3 \div \left( \sqrt{6} \div \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 3 \times \frac{1}{\sqrt{6}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって  $C=60^\circ, 120^\circ$

$\triangle ABC$  は右の図のように

2通りある。

余弦定理により

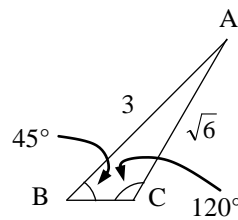
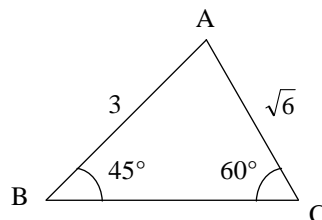
$$(\sqrt{6})^2 = 3^2 + a^2 - 2 \cdot 3 \cdot a \cdot \cos 45^\circ$$

$$6 = 9 + a^2 - 6a \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{整理すると } a^2 - 3\sqrt{2}a + 3 = 0$$

$$\text{解の公式により } a = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{(-3\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{2}$$

また、 $C=60^\circ$  のとき  $A=75^\circ$ 、 $C=120^\circ$  のとき  $A=15^\circ$

$$\text{以上から } (a, A, C) = \left( \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}, 75^\circ, 60^\circ \right), \left( \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}, 15^\circ, 120^\circ \right)$$



### 8 三角形の形状

$\triangle ABC$  において、 $\sin A = 2 \cos B \sin C$  が成り立っているとき、この三角形はどのような三角形か。

### 要点

正弦定理、余弦定理を用いて、与えられた等式を辺だけの関係式に直します。

### 解答

与えられた式に  $\sin A = \frac{a}{2R}$ ,  $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ ,  $\sin C = \frac{c}{2R}$  をそれぞれ代入すると

$$\frac{a}{2R} = 2 \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \cdot \frac{c}{2R}$$

両辺に  $2aR$  を掛けると  $a^2 = a^2 + c^2 - b^2$  これから  $b^2 = c^2$   $b > 0, c > 0$  より  $b = c$

よって、 $\triangle ABC$  は  $AB = AC$  の二等辺三角形である。

### 9 三角形の面積

次の $\triangle ABC$  の面積を求めよ。

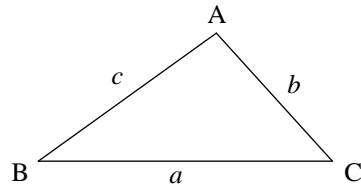
(1)  $AB=2, AC=3, A=60^\circ$

(2)  $AB=6, AC=5, BC=7$

**要 点**

$\triangle ABC$  の面積を  $S$  とすると

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$



**解答**

$$(1) S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$(2) \text{余弦定理により } \cos A = \frac{6^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{5}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1, \quad 0^\circ < A < 180^\circ \text{ のとき, } \sin A > 0 \text{ から } \sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\text{よって } S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = 6\sqrt{6}$$

**別解** ヘロンの公式を用いる。

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{7+5+6}{2} = 9 \text{ であるから}$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{9(9-7)(9-5)(9-6)} = 6\sqrt{6}$$

**10** 三角形の内角の二等分線の長さ

$\triangle ABC$  において、 $AB=5$ 、 $AC=3$ 、 $\angle A=60^\circ$  とする。 $\angle A$  の二等分線と辺  $BC$  の交点を  $D$  とするとき、線分  $AD$  の長さを求めよ。

**要 点**

三角形の面積を利用します。

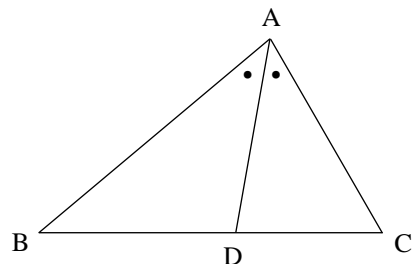
$\angle BAD = \angle DAC$ 、 $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ACD$  であり、

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC$$

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD$$

$$\triangle ACD = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AC \cdot \sin \angle DAC$$

であることから  $AD$  を求めることができます。





**解答**

$\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ACD$  であるので、それぞれ面積の公式から

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD + \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AC \cdot \sin \angle DAC$$

よって  $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot AD \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot AD \cdot 3 \cdot \sin 30^\circ$

すなわち  $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot AD \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot AD \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$

したがって  $AD = \frac{15\sqrt{3}}{8}$

**1 1 内接円の半径**

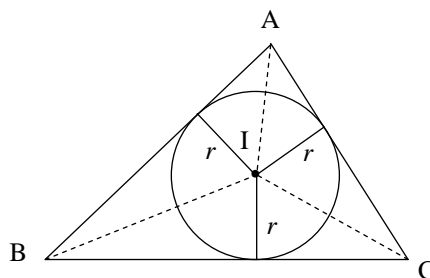
$\triangle ABC$  について、次の問いに答えよ。

- (1)  $a=7, b=9, c=10$  のとき、 $\triangle ABC$  の面積  $S$  と内接円の半径  $r$  を求めよ。
- (2)  $a=6, b=8, \angle C=60^\circ$  のとき、 $\triangle ABC$  の内接円の半径  $r$  を求めよ。

**要 点**

$\triangle ABC$  の内接円の中心、すなわち、内心を  $I$ 、面積を  $S$ 、  
内接円の半径を  $r$  とすると

$$\begin{aligned} S &= \triangle IBC + \triangle ICA + \triangle IAB \\ &= \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr \\ &= \frac{1}{2} r(a+b+c) \end{aligned}$$



内接円の半径は、3辺の長さから求めることができます。

**解答**

(1)  $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{7+9+10}{2} = 13$  であるから、ヘロンの公式により

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{13 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} = 6\sqrt{26}$$

また、 $S = \frac{1}{2} r(a+b+c)$  にそれぞれの値を代入すると

$$6\sqrt{26} = \frac{1}{2} r(7+9+10) \quad \text{これを解いて} \quad r = \frac{6\sqrt{26}}{13}$$

(2)  $\triangle ABC$  の面積を  $S$  とすると

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \angle C = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

また  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle C = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 52$

$c > 0$  から  $c = 2\sqrt{13}$   $S = \frac{1}{2} r(a+b+c)$  にそれぞれの値を代入すると  $12\sqrt{3} = \frac{1}{2} r(6+8+2\sqrt{13})$

$$12\sqrt{3} = (7 + \sqrt{13})r \text{ から } r = \frac{12\sqrt{3}}{7 + \sqrt{13}} = \frac{12\sqrt{3}(7 - \sqrt{13})}{(7 + \sqrt{13})(7 - \sqrt{13})} = \frac{12\sqrt{3}(7 - \sqrt{13})}{36} = \frac{\sqrt{3}(7 - \sqrt{13})}{3}$$

### 研究 1 円に内接する四角形の面積

円に内接する四角形  $ABCD$  において、 $AB=6$ ,  $BC=8$ ,  $CD=6$ ,  $DA=5$  のとき、対角線  $AC$  の長さ、四角形  $ABCD$  の面積  $S$  をそれぞれ求めよ。

### 要 点

円に内接する四角形において、向かい合う角の和は  $180^\circ$  であることを利用します。

### 解答

$\triangle ABC$  において、余弦定理により

$$\begin{aligned} AC^2 &= 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos \angle ABC \\ &= 100 - 96 \cos \angle ABC \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\triangle ADC$  において、余弦定理により

$$\begin{aligned} AC^2 &= 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos \angle ADC \\ &= 61 - 60 \cos(180^\circ - \angle ABC) \\ &= 61 + 60 \cos \angle ABC \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

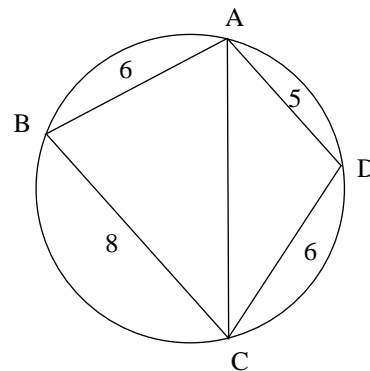
①, ②から  $100 - 96 \cos \angle ABC = 61 + 60 \cos \angle ABC$

これを解いて  $\cos \angle ABC = \frac{1}{4}$  ①に代入すると  $AC^2 = 100 - 96 \cdot \frac{1}{4} = 76$

$AC > 0$  から  $AC = 2\sqrt{19}$

また  $\sin \angle ABC = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$   $\sin \angle ADC = \sin(180^\circ - \angle ABC) = \sin \angle ABC$  より

$$S = \triangle ABC + \triangle ADC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{39\sqrt{15}}{4}$$



**研究 2** 正四面体の体積

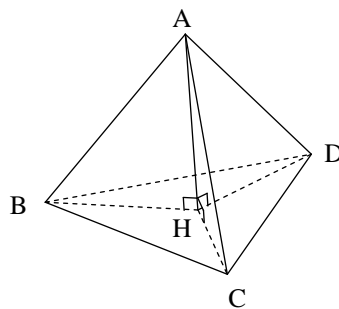
1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD の体積を求めよ。

**要 点**

頂点 A から底面  $\triangle BCD$  に  
垂線 AH を引くと、直角三角形の  
斜辺と他の 1 辺が等しいから

$$\triangle ABH \equiv \triangle ACH \equiv \triangle ADH$$

よって、 $BH=CH=DH$  であるから、  
点 H は  $\triangle BCD$  の外心であることを  
利用します。

**解答**

頂点 A から底面  $\triangle BCD$  に垂線 AH を引くと  $\triangle ABH \equiv \triangle ACH \equiv \triangle ADH$

これから、 $BH=CH=DH$  であるので、点 H は  $\triangle BCD$  の外心である。

よって、BH は  $\triangle BCD$  の外接円の半径であるから

$$\frac{2}{\sin 60^\circ} = 2BH \quad \text{これから} \quad BH = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$\triangle ABH$  は直角三角形であるから、三平方の定理により

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{また} \quad \triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$$

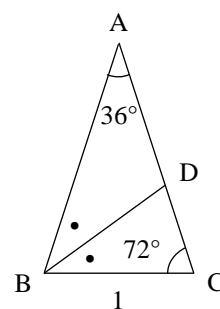
$$\text{以上から、正四面体の体積は} \quad \frac{1}{3} \cdot \triangle BCD \cdot AH = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

**研究 3**  $36^\circ$  の三角比

$A=36^\circ$  ,  $B=C=72^\circ$  ,  $BC=1$  の

$\triangle ABC$  があり,  $\angle ABC$  の二等分線と  $AC$  の交点を  $D$  とする。

$\triangle ABC \sim \triangle BCD$  であることを利用して,  $\cos 36^\circ$  を求めてみよう。

**解答**

$\angle BAC = \angle CBD = 36^\circ$  ,  $\angle ABC = \angle BCD$  より  $\triangle ABC \sim \triangle BCD$

また,  $\triangle BCD$ ,  $\triangle ABD$  は二等辺三角形であるから,  $BC = BD = AD = 1$  である。

$AB : BC = BC : CD$  であるから,  $AB = x$  とおくと  $CD = x - 1$  より

$$x : 1 = 1 : (x - 1) \quad \text{よって} \quad x(x - 1) = 1 \quad x^2 - x - 1 = 0$$

これを解いて  $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$   $x > 0$  より  $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

$\triangle ABC$  において, 余弦定理により  $1 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos 36^\circ$  これから  $\cos 36^\circ = \frac{2x^2 - 1}{2x^2}$

$$x^2 = \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ であるから}$$

$$\cos 36^\circ = \frac{2 \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{2} - 1}{2 \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{2 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{(2 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})}{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})} = \frac{6 - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 5}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$