微分と積分

1

関数 $f(x)=x^2-2$ について，次のものを求めよ。

(1)　x の値が -2 から 1 まで変化するときの平均変化率

(2)　$x=-1$ における微分係数

(3)　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $A(t,\ f(t))$ における接線の傾きが 2 になるときの，t の値

解答

(1)　求める平均変化率は　$\dfrac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\dfrac{(1^2-2)-\{(-2)^2-2\}}{1-(-2)}=\mathbf{-1}$

(2)　求める微分係数は　$f'(-1)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{\{(-1+h)^2-2\}-\{(-1)^2-2\}}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1-2h+h^2-2-1+2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-2h+h^2}{h}=\lim_{h\to0}(-2+h)=\mathbf{-2}$$

(3)　$f'(t)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{\{(t+h)^2-2\}-(t^2-2)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{t^2+2ht+h^2-2-t^2+2}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2ht+h^2}{h}=\lim_{h\to0}(2t+h)=2t$$

点 A における接線の傾きが 2 であるから　$f'(t)=2$　　よって　$2t=2$　　したがって　$\boldsymbol{t=1}$

$\boxed{2}$
関数 $f(x)=x^2+3x$ を，定義に従って微分せよ。

解答

$$\boldsymbol{f'(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)^2+3(x+h)\}-(x^2+3x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2+3x+3h-x^2-3x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2+3h}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h+3) = \boldsymbol{2x+3}$$

$\boxed{3}$

次の関数を微分せよ。

(1)　$y=x^3-3x^2-3x-6$　　　　(2)　$y=(x+2)(x-4)^2$

解答

(1)　$y'=(x^3-3x^2-3x-6)'=(x^3)'-3(x^2)'-3(x)'-(6)'=3x^2-3\cdot 2x-3\cdot 1-0=\mathbf{3x^2-6x-3}$

(2)　$y=(x+2)(x-4)^2=(x+2)(x^2-8x+16)=x^3-8x^2+16x+2x^2-16x+32=x^3-6x^2+32$ であるから

$y'=(x^3-6x^2+32)'=(x^3)'-6(x^2)'+(32)'=3x^2-6\cdot 2x+0=\mathbf{3x^2-12x}$

$\boxed{4}$

(1)　次の関数 $f(x)$について，$x=-3$ における微分係数を求めよ。

①　$f(x)=2x^2+4x$　　②　$f(x)=x^3+4x^2+x+2$

(2)　直線上を動く物体の t 秒後の位置 $f(t)$ m は，$f(t)=t^2+3t$ で表される。次のものを求めよ。

①　1 秒後から 5 秒後までの平均の速さ

②　3 秒後の瞬間の速さ

解答

(1)　①　$f'(x)=4x+4$

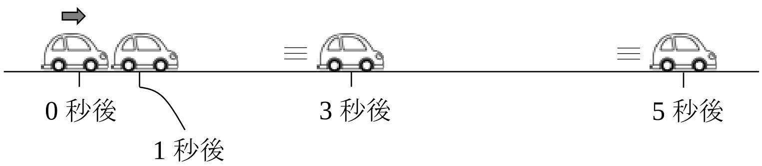
よって　$f'(-3)=4\cdot(-3)+4=\mathbf{-8}$

②　$f'(x)=3x^2+4\cdot2x+1+0=3x^2+8x+1$

よって　$f'(-3)=3\cdot(-3)^2+8\cdot(-3)+1=\mathbf{4}$

(2)　①　求める平均の速さは

$$\frac{5^2+3\cdot5-(1^2+3\cdot1)}{5-1}=\mathbf{9\ (m/s)}$$



②　$f'(t)=2t+3$

よって，求める瞬間の速さは　$f'(3)=2\cdot3+3=\mathbf{9\ (m/s)}$

$\boxed{5}$

(1)　曲線 $y=x^3+x^2$ 上の点(1，2)における接線の方程式を求めよ。

(2)　点(1，－1)から曲線 $y=x^2+2x$ に引いた接線の方程式を求めよ。

解答

(1)　$f(x)=x^3+x^2$ とすると　$f'(x)=3x^2+2x$

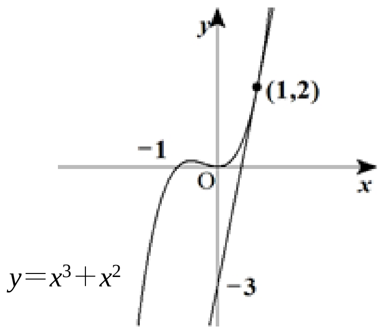
点(1，2)における接線の傾きは

$f'(1)=3\cdot1^2+2\cdot1=5$

よって，求める接線の方程式は

$y-2=5(x-1)$

すなわち　$\boldsymbol{y=5x-3}$



(2)　$f(x)=x^2+2x$ とすると　$f'(x)=2x+2$

接点の座標を$(a,\ a^2+2a)$とおくと，その点における

接線の傾きは　$f'(a)=2a+2$

よって，この接線の方程式は

$y-(a^2+2a)=(2a+2)(x-a)$

すなわち　$y=(2a+2)x-a^2$　……①

直線①が点(1，－1)を通るから　$-1=(2a+2)\cdot1-a^2$

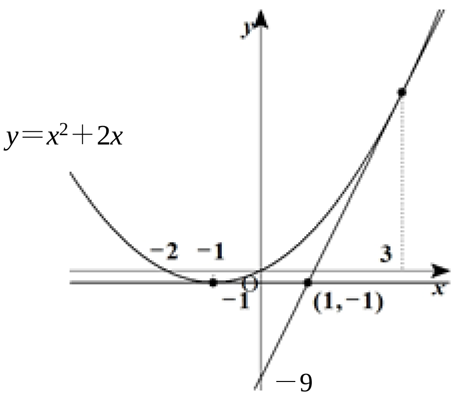
整理すると　$(a+1)(a-3)=0$

これを解くと　$a=-1,\ 3$

$a=-1$ のとき，①は　$y=-1$

$a=3$ のとき，①は　$y=8x-9$

以上から，求める接線の方程式は　$\boldsymbol{y=-1,\ y=8x-9}$



$\boxed{6}$

(1)　関数 $y=x^3+3x^2-9x-7$ の増減を調べよ。

(2)　次の関数の極値を調べて，グラフをかけ。

①　$y=-2x^3+x^2+8x$　　　　②　$y=-3x^3+3x^2-x+1$

解答

(1)　$y'=3x^2+6x-9=3(x^2+2x-3)=3(x+3)(x-1)$

$y'=0$ とすると　$x=-3,\ 1$

y の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	20	↘	-12	↗

したがって，y は

$x\leqq-3$，$1\leqq x$ で増加し，$-3\leqq x\leqq 1$ で減少する。

(2)　①　$y'=-6x^2+2x+8$

$=-2(3x^2-x-4)$

$=-2(x+1)(3x-4)$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \rightarrow & 3 \\ 3 & -4 & \rightarrow & -4 \\ \hline & & & -1 \end{array}$$

$y'=0$ とすると

$x=-1,\ \dfrac{4}{3}$

y の増減表は右のようになる。

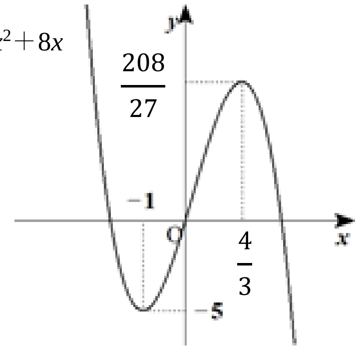
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	-5	↗	$\frac{208}{27}$	↘

よって，**$x=-1$ で極小となり，極小値は-5**

$x=\dfrac{4}{3}$ で極大となり，極大値は$\dfrac{208}{27}$

したがって，グラフは右の図のようになる。

$y=-2x^3+x^2+8x$



②　$y'=-9x^2+6x-1$

$=-(9x^2-6x+1)$

$=-(3x-1)^2$

$y'=0$ とすると　$x=\dfrac{1}{3}$

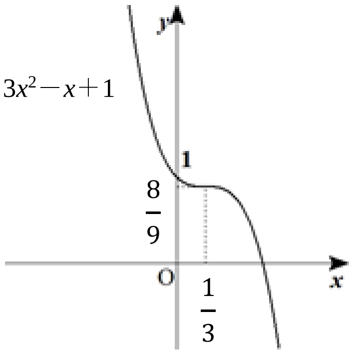
x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$
y	↘	$\frac{8}{9}$	↘

y の増減表は右のようになる。

よって，**極値をもたない。**

グラフは右の図のようになる。

$y=-3x^3+3x^2-x+1$



$\boxed{7}$

3 次関数$f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + 1$ が$x = -\dfrac{1}{3}$で極小となり，$x = 1$ で極大となるとき，定数a，bの値を求めよ。

解答

$f'(x) = -3x^2 + 2ax + b$　　$x = -\dfrac{1}{3}$，$x = 1$ で極値をとるから　$f'\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 0$，$f'(1) = 0$

よって　$\begin{cases} -\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}a + b = 0 \\ -3 + 2a + b = 0 \end{cases}$　　これを解いて　$a = 1$，$b = 1$

このとき　$f(x) = -x^3 + x^2 + x + 1$

$f'(x) = -3x^2 + 2x + 1 = -(3x^2 - 2x - 1)$

$= -(3x + 1)(x - 1)$

$$\begin{array}{cccc} 3 & 1 & \to & 1 \\ 1 & -1 & \to & -3 \\ \hline & & & -2 \end{array}$$

$f'(x) = 0$ とすると，$x = -\dfrac{1}{3}$，1 であるから，

増減表は右のようになる。

$f(x)$は$x = -\dfrac{1}{3}$で極小，$x = 1$ で極大となり，

題意を満たす。

したがって　$\boldsymbol{a = 1}$，$\boldsymbol{b = 1}$

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	－	0	＋	0	－
$f(x)$	↘	$\dfrac{22}{27}$	↗	2	↘

$\boxed{8}$

(1)　関数 $f(x)=-x^3+x^2-3ax+2$ が極値をもつとき，定数 a のとり得る値の範囲を求めよ。

(2)　関数 $f(x)=x^3+2ax^2+3x-4$ が極値をもたないような定数 a の値の範囲を求めよ。

解答

(1)　$f'(x)=-3x^2+2x-3a$

$f(x)$が極値をもつための条件は，$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことである。

$f'(x)=0$ の判別式を D とすると　$D=2^2-4\cdot(-3)\cdot(-3a)=4-36a$

よって，$D>0$ となるのは　$\boldsymbol{a<\frac{1}{9}}$

(2)　$f'(x)=3x^2+4ax+3$

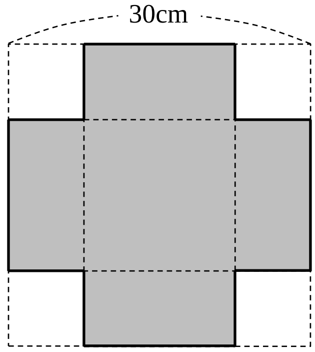
$f(x)$が極値をもたないための条件は，$f'(x)=0$ が 1 つだけ実数解をもつ，または実数解をもたないことである。$f'(x)=0$ の判別式を D とすると　$D=(4a)^2-4\cdot3\cdot3=4(2a+3)(2a-3)$

よって，$D\leqq0$ となるのは　$\boldsymbol{-\frac{3}{2}\leqq a\leqq\frac{3}{2}}$

$\boxed{9}$

(1)　関数 $y=x^3-2x^2$ の，区間 $-1\leqq x\leqq 2$ における最大値と最小値を求めよ。

(2)　1 辺が 30cm の正方形の厚紙の四隅から同じ大きさの正方形を切り抜いて，ふたのない直方体の箱を作る。このとき，箱の容積を最大にするには，切り抜く正方形の 1 辺を何 cm にすればよいか。



解答

(1)　$y'=3x^2-4x$

$\quad=x(3x-4)$

$y'=0$ とすると

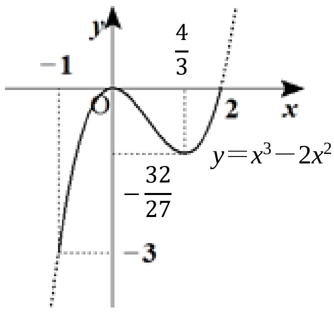
$x=0,\ \dfrac{4}{3}$

y の増減表は右のようになる。

よって，**$x=0$，2 で最大値 0**

$x=-1$ で最小値 -3

をとる。



x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-3	↗	0	↘	$-\frac{32}{27}$	↗	0

(2)　切り抜く正方形の 1 辺を $x$cm とする。

$x>0$，$30-2x>0$ から　$0<x<15$

箱の容積を V(cm^3)とすると

$V=x(30-2x)^2=x(900-120x+4x^2)$

$\quad=4x^3-120x^2+900x$

$V'=12x^2-240x+900=12(x^2-20x+75)$

$\quad=12(x-5)(x-15)$

$0<x<15$ において，$V'=0$ となるのは

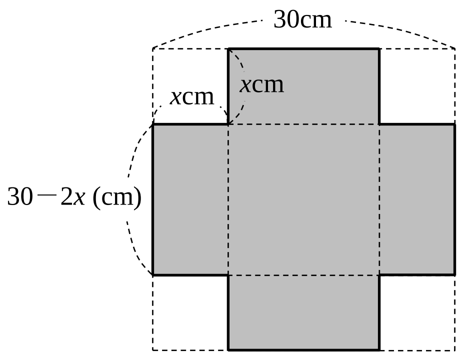
$x=5$

V の増減表は右のようになる。

よって，$x=5$ で最大値 2000 をとる。

したがって，切り抜く正方形の 1 辺を

5cm にすればよい。



x	0	$\cdots$	5	$\cdots$	15
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	2000	↘	

１０

3 次方程式 $2x^3-6x+a=0$ が異なる 3 個の実数解をもつとき，実数 a のとり得る値の範囲を求めよ。

解答

方程式を変形すると　$-2x^3+6x=a$　……①

ここで　$\begin{cases} y=-2x^3+6x & \cdots\cdots② \\ y=a & \cdots\cdots③ \end{cases}$

とおくと，方程式①の異なる実数解の個数は，②と③のグラフの共有点の個数に一致する。

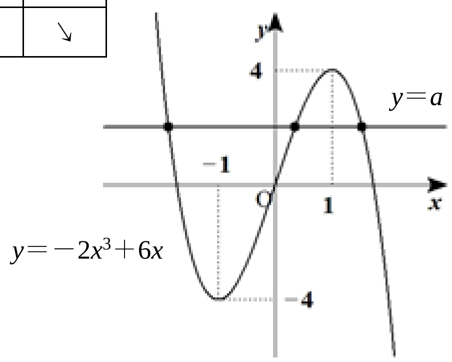
$y=-2x^3+6x$ において

$y'=-6x^2+6=-6(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると　$x=-1,\ 1$

増減表とグラフは右のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	-4	↗	4	↘



求める a の値の範囲は，$y=-2x^3+6x$ のグラフと直線 $y=a$ が 3 個の共有点をもつ範囲であるから　$\boldsymbol{-4<a<4}$

別解　方程式 $f(x)=0$ の実数解は，$y=f(x)$のグラフと x 軸の共有点の x 座標である。

極値の符号から，題意を満たす a の値の範囲を求めることもできる。

$y=2x^3-6x+a$ とおくと

$y'=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると　$x=-1,\ 1$

y の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	$4+a$	↘	$-4+a$	↗

極値と x 軸の位置関係から

$\begin{cases} 4+a>0 \\ -4+a<0 \end{cases}$

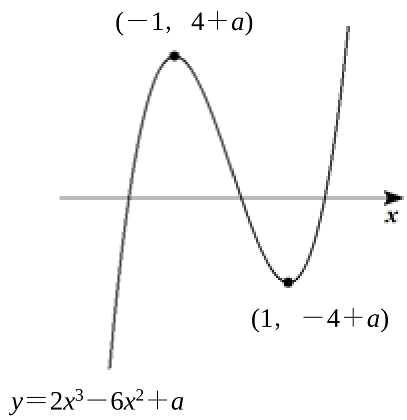
であれば題意を満たす。

よって　$-4<a<4$

〈注意〉2 つの極値の y 座標が異符号であればよいので

$(4+a)(-4+a)<0$

としてもよい。



$\boxed{１１}$

$x \geqq 0$ のとき，不等式 $x^3+80 \geqq 3x(x+8)$が成り立つことを証明せよ。

証明

$f(x)=x^3+80-3x(x+8)=x^3-3x^2-24x+80$ とおく。

$f'(x)=3x^2-6x-24=3(x^2-2x-8)=3(x+2)(x-4)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-2,\ 4$

$x \geqq 0$ における $f(x)$の増減表は

右のようになる。

x	0	…	4	…
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	80	↘	0	↗

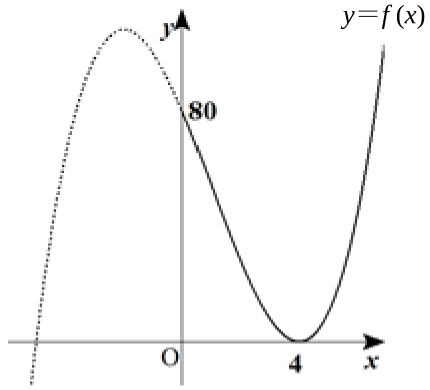
よって，$x \geqq 0$ のとき $f(x)$は

$x=4$ で最小値 0 をとる。

したがって　$f(x) \geqq 0$

すなわち　$x^3+80-3x(x+8) \geqq 0$

以上から，$x \geqq 0$ のとき　$x^3+80 \geqq 3x(x+8)$



$\boxed{１２}$

(1)　次の不定積分を求めよ。

①　$\displaystyle\int(2x+1)\,dx$　　②　$\displaystyle\int(x^2-3x-5)\,dx$　　③　$\displaystyle\int(2t^2+1)(2t-3)\,dt$

(2)　$f'(x)=3x^2-x$，$f(2)=7$ を満たす関数 $f(x)$を求めよ。

解答

C は積分定数とする。

(1)　①　$\displaystyle\int(2x+1)\,dx=2\int x\,dx+\int dx=2\cdot\frac{1}{2}x^2+x+C=\boldsymbol{x^2+x+C}$

②　$\displaystyle\int(x^2-3x-5)\,dx=\int x^2\,dx-3\int x\,dx-5\int dx=\frac{1}{3}x^3-3\cdot\frac{1}{2}x^2-5x+C$

$\displaystyle=\boldsymbol{-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-5x+C}$

③　$\displaystyle\int(2t^2+1)(2t-3)\,dt=\int(4t^3-6t^2+2t-3)\,dt=4\int t^3\,dt-6\int t^2\,dt+2\int t\,dt-3\int dt$

$\displaystyle=4\cdot\frac{1}{4}t^4-6\cdot\frac{1}{3}t^3+2\cdot\frac{1}{2}t^2-3t+C=\boldsymbol{t^4-2t^3+t^2-3t+C}$

(2)　$f(x)$は $3x^2-x$の原始関数であるから　$\displaystyle f(x)=\int(3x^2-x)\,dx=x^3-\frac{1}{2}x^2+C$

ここで　$\displaystyle f(2)=2^3-\frac{1}{2}\cdot2^2+C=6+C$　　$f(2)=7$ であるから　$6+C=7$

よって　$C=1$　　したがって　$\displaystyle\boldsymbol{f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2+1}$

１３

(1)　次の定積分を求めよ。

①　$\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2-3)\,dx$　　②　$\displaystyle\int_{0}^{2}(2t+1)(4t^2-2t+1)\,dt$

③　$\displaystyle\int_{1}^{3}x^2(x-4)\,dx+4\int_{1}^{3}x(x-1)\,dx-\int_{2}^{3}x(x+2)(x-2)\,dx$

(2)　等式$f(x)=2x^2+2x-\displaystyle\int_{-3}^{0}f(t)\,dt$ を満たす関数$f(x)$を求めよ。

解答

(1)　①　$\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2-3)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-3x\right]_{-1}^{1}=\left(\frac{1}{3}-3\right)-\left(-\frac{1}{3}+3\right)=-\boldsymbol{\frac{16}{3}}$

②　$\displaystyle\int_{0}^{2}(2t+1)(4t^2-2t+1)\,dt=\int_{0}^{2}(8t^3+1)\,dt=\left[8\cdot\frac{1}{4}t^4+t\right]_{0}^{2}=\Big[2t^4+t\Big]_{0}^{2}=(32+2)-0=\boldsymbol{34}$

③　$\displaystyle\int_{1}^{3}x^2(x-4)\,dx+4\int_{1}^{3}x(x-1)\,dx-\int_{2}^{3}x(x+2)(x-2)\,dx$

$\displaystyle=\int_{1}^{3}\{x^2(x-4)+4x(x-1)\}\,dx-\int_{2}^{3}x(x^2-4)\,dx$

$\displaystyle=\int_{1}^{3}(x^3-4x^2+4x^2-4x)\,dx-\int_{2}^{3}(x^3-4x)\,dx=\int_{1}^{3}(x^3-4x)\,dx+\int_{3}^{2}(x^3-4x)\,dx$

$\displaystyle=\int_{1}^{2}(x^3-4x)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4-4\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_{1}^{2}=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{1}^{2}$

$\displaystyle=(4-8)-\left(\frac{1}{4}-2\right)=-\boldsymbol{\frac{9}{4}}$

(2)　$\displaystyle\int_{-3}^{0}f(t)\,dt$ は定数であるから，$\displaystyle\int_{-3}^{0}f(t)\,dt=a$ とおく。

このとき　$f(x)=2x^2+2x-a$

よって　$\displaystyle\int_{-3}^{0}f(t)\,dt=\int_{-3}^{0}(2t^2+2t-a)\,dt=\left[2\cdot\frac{1}{3}t^3+2\cdot\frac{1}{2}t^2-at\right]_{-3}^{0}=\left[\frac{2}{3}t^3+t^2-at\right]_{-3}^{0}$

$=0-(-18+9+3a)=9-3a$

$\displaystyle\int_{-3}^{0}f(t)\,dt=a$であるから　$9-3a=a$　　これを解いて　$a=\dfrac{9}{4}$

したがって　$\boldsymbol{f(x)=2x^2+2x-\dfrac{9}{4}}$

１４

等式$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = 3x^2+4x+1$を満たす関数$f(x)$と定数$a$の値をそれぞれ求めよ。

解答

等式の両辺を x について微分すると　$\boldsymbol{f(x)=6x+4}$

また，与えられた等式において，$x=a$とおくと　$\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = 3a^2+4a+1$

左辺は 0 であるから　$0=3a^2+4a+1$

よって　$(a+1)(3a+1)=0$

したがって　$\boldsymbol{a=-1,\ -\frac{1}{3}}$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & 1 & \to & 3 \\ 3 & & 1 & \to & 1 \\ \hline & & & & 4 \end{array}$$

１５

次の曲線や直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1)　$y=2x^2+2x$,　　x 軸,　　$x=1$,　　$x=2$

(2)　$y=-x^2+4$,　　x 軸

(3)　$y=x^2-3x+2$,　　x 軸

(4)　$y=x^2+2x+3$,　　$y=-2x$

(5)　$y=(x+1)^2$,　　$y=-x^2+5$

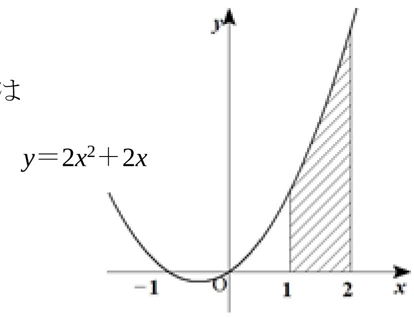
解答

(1)　$y=2x^2+2x=2(x^2+x)=2\left\{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\right\}=2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}$

より，右の図から $1\leqq x\leqq 2$ において $y\geqq 0$ であるから，求める面積 S は

$$S=\int_1^2(2x^2+2x)\,dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^3+x^2\right]_1^2=\left(\frac{16}{3}+4\right)-\left(\frac{2}{3}+1\right)=\boldsymbol{\frac{23}{3}}$$

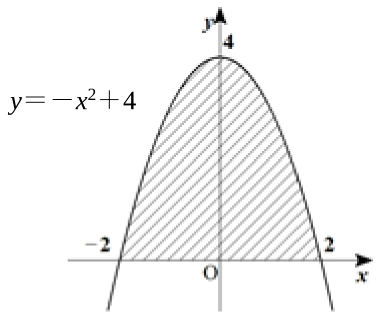


(2)　$y=-x^2+4=-(x+2)(x-2)$

区間 $-2\leqq x\leqq 2$ において $y\geqq 0$ であるから，求める面積 S は

$$S=\int_{-2}^2(-x^2+4)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{-2}^2=\left(-\frac{8}{3}+8\right)-\left(\frac{8}{3}-8\right)=\boldsymbol{\frac{32}{3}}$$



$\boxed{\text{別解}}$　公式 $\displaystyle\int_\alpha^\beta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\beta})\,\boldsymbol{dx}=-\boldsymbol{\frac{1}{6}}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})^{\boldsymbol{3}}$ を利用する。

$$\left(S=\int_{-2}^2(-x^2+4)\,dx\text{までは解答と同じ。}\right)$$

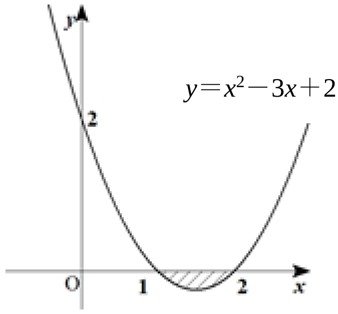
$$S=\int_{-2}^2(-x^2+4)\,dx=-\int_{-2}^2(x+2)(x-2)\,dx=-\left[-\frac{1}{6}\{2-(-2)\}^3\right]=\frac{32}{3}$$

(3)　$y=x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

区間 $1\leqq x\leqq 2$ において $y\leqq 0$ であるから，求める面積 S は

$$S=-\int_1^2(x^2-3x+2)\,dx$$

$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_1^2=-\left(\frac{8}{3}-6+4\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$$



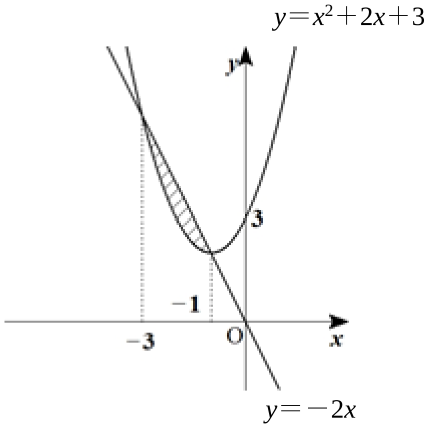
$\boxed{別解}$　公式 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\beta})\,\boldsymbol{dx}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})^{\mathbf{3}}$ を利用する。

$\left(S=-\displaystyle\int_{1}^{2}(x^2-3x+2)\,dx \text{までは解答と同じ。}\right)$

$$S=-\int_{1}^{2}(x^2-3x+2)\,dx=-\int_{1}^{2}(x-1)(x-2)\,dx=-\left\{-\frac{1}{6}(2-1)^3\right\}=\frac{1}{6}$$

(4)　$x^2+2x+3=-2x$ を解くと　$(x+3)(x+1)=0$ から　$x=-3,\ -1$

区間 $-3\leqq x\leqq -1$ において $-2x\geqq x^2+2x+3$ であるから，求める面積 S は



$$S=\int_{-3}^{-1}\{-2x-(x^2+2x+3)\}\,dx=\int_{-3}^{-1}(-x^2-4x-3)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-2x^2-3x\right]_{-3}^{-1}=\left(\frac{1}{3}-2+3\right)-(9-18+9)$$

$$=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$$

$\boxed{別解}$　公式 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\beta})\,\boldsymbol{dx}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})^{\mathbf{3}}$ を利用する。

$\left(S=\displaystyle\int_{-3}^{-1}(-x^2-4x-3)\,dx \text{までは解答と同じ。}\right)$

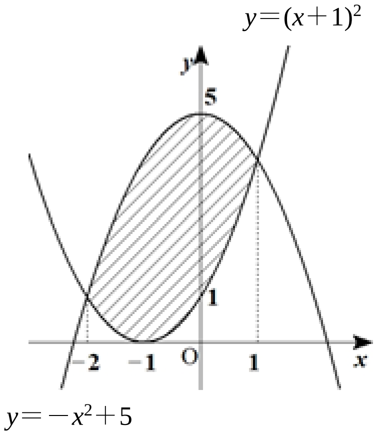
$$S=\int_{-3}^{-1}(-x^2-4x-3)\,dx=-\int_{-3}^{-1}(x+3)(x+1)\,dx=-\left[-\frac{1}{6}\{-1-(-3)\}^3\right]=\frac{4}{3}$$

(5)　$(x+1)^2=-x^2+5$ を解くと　$2x^2+2x-4=0$

$2(x+2)(x-1)=0$ から　$x=-2,\ 1$

区間 $-2\leqq x\leqq 1$ において $-x^2+5\geqq(x+1)^2$ であるから，

求める面積 S は



$$S=\int_{-2}^{1}\{(-x^2+5)-(x+1)^2\}\,dx=\int_{-2}^{1}(-2x^2-2x+4)\,dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\right]_{-2}^{1}=\left(-\frac{2}{3}-1+4\right)-\left(\frac{16}{3}-4-8\right)$$

$$=\mathbf{9}$$

$\boxed{別解}$　公式 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\beta})\,\boldsymbol{dx}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})^{\mathbf{3}}$ を利用する。

$\left(S=\displaystyle\int_{-2}^{1}(-2x^2-2x+4)\,dx \text{までは解答と同じ。}\right)$

$$S=\int_{-2}^{1}(-2x^2-2x+4)\,dx=-2\int_{-2}^{1}(x+2)(x-1)\,dx=-2\left[-\frac{1}{6}\{1-(-2)\}^3\right]=9$$

$\boxed{１６}$

(1)　曲線 $y=x^3-7x+6$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(2)　①　点(2，3)から曲線 $y=x^2$ に引いた接線の方程式を求めよ。

②　①で求めた 2 本の接線と曲線 $y=x^2$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解答

(1)　$f(x)=x^3-7x+6$ とおくと

$f(1)=1-7+6=0$ より

$f(x)=(x-1)(x^2+x-6)$

$=(x-1)(x+3)(x-2)$

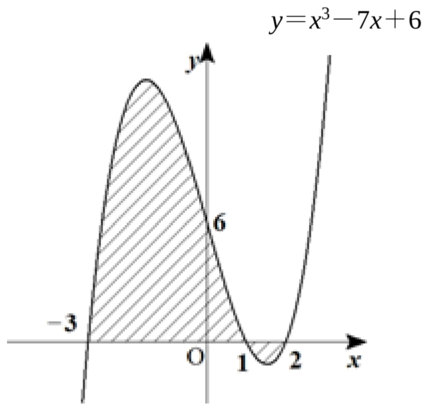
$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

よって，曲線 y と x 軸との交点は

$(-3,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(2,\ 0)$であるから

曲線の概形は右の図のようになり，

面積 S は斜線部の図形の面積である。



$-3 \leqq x \leqq 1$ で $y \geqq 0$，$1 \leqq x \leqq 2$ で $y \leqq 0$

であるから，求める面積 S は

$$S=\int_{-3}^{1}(x^3-7x+6)\,dx+\int_{1}^{2}\{-(x^3-7x+6)\}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{2}x^2+6x\right]_{-3}^{1}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{7}{2}x^2-6x\right]_{1}^{2}$$

$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{7}{2}+6\right)-\left(\frac{81}{4}-\frac{63}{2}-18\right)+(-4+14-12)-\left(-\frac{1}{4}+\frac{7}{2}-6\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{131}{4}}$$

(2)　①　$f(x)=x^2$ とすると　$f'(x)=2x$

接点の座標を$(a,\ a^2)$とおくと，その点における

接線の傾きは　$f'(a)=2a$

よって，この接線の方程式は

$y-a^2=2a(x-a)$

すなわち　$y=2ax-a^2$　　　　……①

直線①が点(2，3)を通るから　$3=4a-a^2$

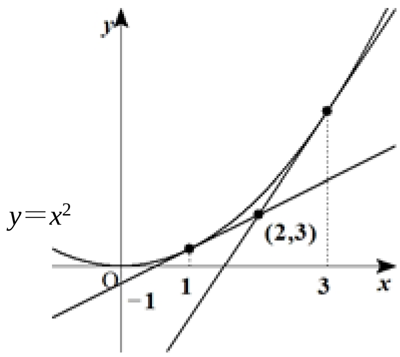
$a^2-4a+3=0$　　　$(a-1)(a-3)=0$

これを解くと　$a=1，3$

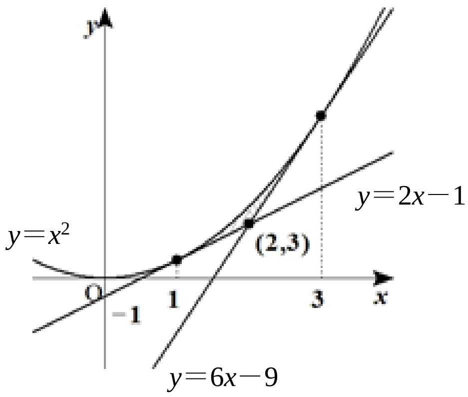
$a=1$ のとき，①は　$y=2x-1$

$a=3$ のとき，①は　$y=6x-9$

以上から，求める接線の方程式は　$\boldsymbol{y=2x-1}$，$\boldsymbol{y=6x-9}$



② 求める面積 S は，右の図の斜線部分の面積であるから



$$S=\int_1^2\{x^2-(2x-1)\}\,dx+\int_2^3\{x^2-(6x-9)\}\,dx$$

$$=\int_1^2(x^2-2x+1)\,dx+\int_2^3(x^2-6x+9)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_2^3$$

$$=\left(\frac{8}{3}-4+2\right)-\left(\frac{1}{3}-1+1\right)+(9-27+27)-\left(\frac{8}{3}-12+18\right)=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

$\boxed{\text{別解}}$ 公式 $\displaystyle\int(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha})^2\,\boldsymbol{dx}=\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\alpha})^3}{\mathbf{3}}+\boldsymbol{C}$ （Cは積分定数） を利用する。

$\left(S=\displaystyle\int_1^2(x^2-2x+1)\,dx+\int_2^3(x^2-6x+9)\,dx\right.$までは解答と同じ。$\Big)$

$$S=\int_1^2(x^2-2x+1)\,dx+\int_2^3(x^2-6x+9)\,dx=\int_1^2(x-1)^2\,dx+\int_2^3(x-3)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_2^3=\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$$