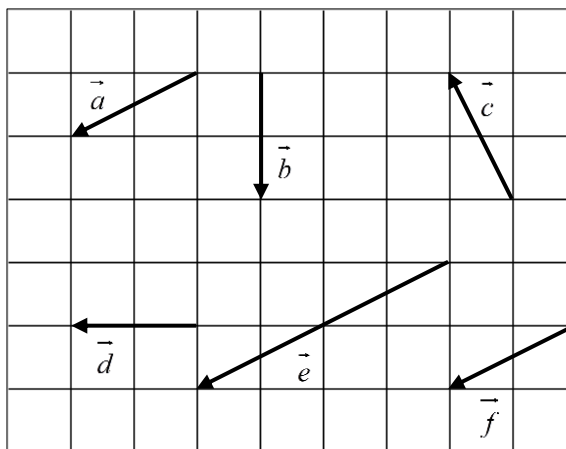


平面上のベクトル

1

右の図において、次のベクトルを選べ。

- (1) 等しいベクトル
- (2) 大きさが等しいベクトル
- (3) 向きが等しいベクトル

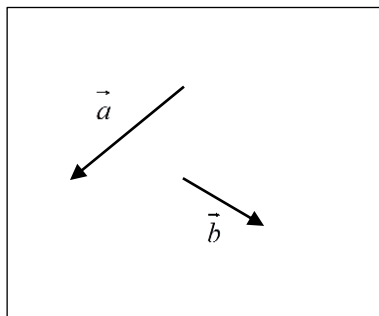


解答

- (1) \vec{a} と \vec{f}
- (2) \vec{a} と \vec{c} と \vec{f} , \vec{b} と \vec{d}
- (3) \vec{a} と \vec{e} と \vec{f}

2

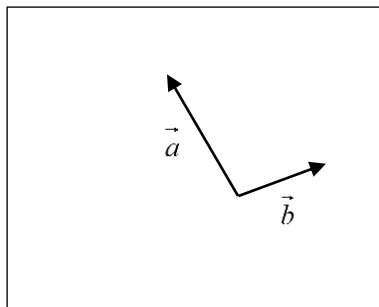
(1) 右の図の2つのベクトル \vec{a} , \vec{b} について,
 $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ を図示せよ。



(2) 右の図の2つのベクトル \vec{a} , \vec{b} について,
 次のベクトルを図示せよ。

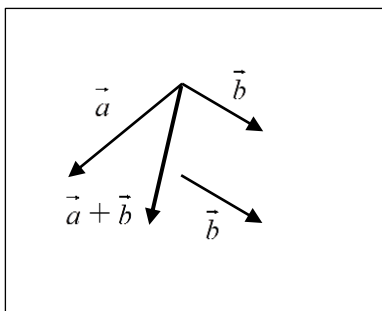
① $\frac{1}{2}\vec{a}$

② $\vec{a} - 2\vec{b}$

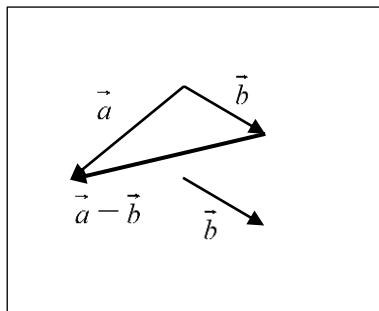


解答

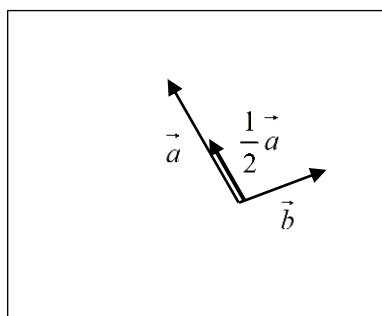
(1) $\vec{a} + \vec{b}$



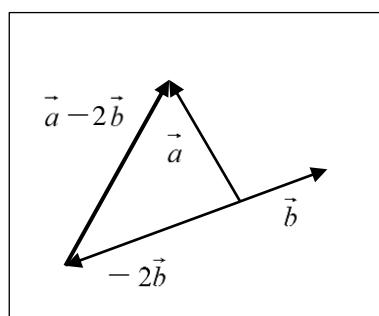
$\vec{a} - \vec{b}$



(2) ① $\frac{1}{2}\vec{a}$



② $\vec{a} - 2\vec{b}$



3

次の問いに答えよ。

- (1) 等式 $2(\vec{a} + 2\vec{x}) - 4\vec{a} = 5(\vec{x} - 3\vec{b})$ を満たすベクトル \vec{x} を, \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。
 (2) 等式 $\vec{x} + \vec{y} = \vec{a}$, $3\vec{x} + 2\vec{y} = \vec{b}$ を満たすベクトル \vec{x} , \vec{y} を, \vec{a} , \vec{b} を用いてそれぞれ表せ。

解答

(1) 展開すると $2\vec{a} + 4\vec{x} - 4\vec{a} = 5\vec{x} - 15\vec{b}$ よって $\vec{x} = -2\vec{a} + 15\vec{b}$

(2) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{a}$ ……①, $3\vec{x} + 2\vec{y} = \vec{b}$ ……② とおく。

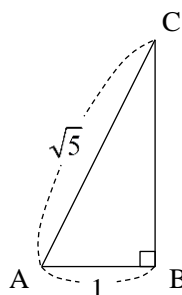
①×2-②から $-\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$ よって $\vec{x} = -2\vec{a} + \vec{b}$

これを①に代入すると $-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{y} = \vec{a}$ よって $\vec{y} = 3\vec{a} - \vec{b}$

\vec{y} の別解 ①×3-②から $\vec{y} = 3\vec{a} - \vec{b}$

4

右の図のような直角三角形 ABC において,
 \vec{BC} と平行な単位ベクトルを \vec{AB} , \vec{AC} を
 用いて表せ。



解答

$BC = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = 2$, $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$ より, 求める単位ベクトルは

$$\frac{\vec{BC}}{|\vec{BC}|} = \frac{\vec{AC} - \vec{AB}}{2}, \quad -\frac{\vec{BC}}{|\vec{BC}|} = -\frac{\vec{AC} - \vec{AB}}{2}$$

5

$\vec{a}=(2, -4)$, $\vec{b}=(5, -3)$ のとき, $-3\vec{a}+2\vec{b}$ を成分で表せ。また, その大きさを求めよ。

解答

$$-3\vec{a}+2\vec{b}=-3(2, -4)+2(5, -3)=(-6, 12)+(10, -6)=(4, 6)$$

$$|-3\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$$

6

$\vec{a}=(2, -4)$, $\vec{b}=(5, -3)$ のとき, $\vec{p}=(7, 0)$ を $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ の形で表せ。

解答

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}\text{を成分で表すと } (7, 0)=s(2, -4)+t(5, -3)=(2s+5t, -4s-3t)$$

$$\text{よって } \begin{cases} 7=2s+5t \\ 0=-4s-3t \end{cases} \text{これを解いて } s=-\frac{3}{2}, t=2$$

$$\text{したがって } \vec{p}=-\frac{3}{2}\vec{a}+2\vec{b}$$

7

次の問いに答えよ。

- (1) 4点 $A(2, -4)$, $B(5, -3)$, $C(2, 1)$, D を頂点とする平行四辺形 $ABCD$ がある。頂点 D の座標を求めよ。
- (2) 2つのベクトル $\vec{a} = (2, -4)$, $\vec{b} = (5+t, -3-t)$ が平行になるように、 t の値を定めよ。

解答

- (1) 頂点 D の座標を (x, y) とおく。

四角形 $ABCD$ が平行四辺形であるから

$$\vec{AB} = \vec{DC}$$

ここで $\vec{AB} = (5-2, -3-(-4)) = (3, 1)$

$$\vec{DC} = (2-x, 1-y)$$

よって $\begin{cases} 3=2-x \\ 1=1-y \end{cases}$ これを解いて $x=-1, y=0$

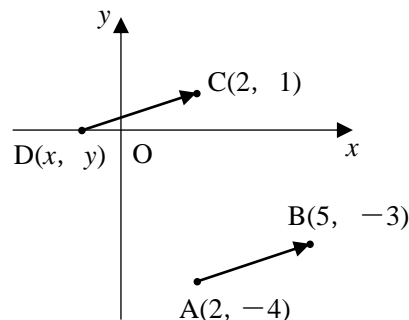
したがって $D(-1, 0)$

- (2) $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ で、 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ より、 $\vec{b} = k\vec{a}$ となる実数 k があるから

$$(5+t, -3-t) = k(2, -4)$$

よって $\begin{cases} 5+t=2k \\ -3-t=-4k \end{cases}$ これを解いて $k=-1, t=-7$

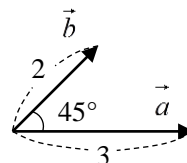
したがって $t=-7$



8

次の内積を求めよ。

- (1) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, \vec{a} と \vec{b} のなす角が 45° のときの、内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$



- (2) $\vec{a} = (2, -4)$, $\vec{b} = (5, 3)$ のときの、内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$

解答

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 45^\circ = 3 \times 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 5 + (-4) \times 3 = -2$

9

次の問いに答えよ。

(1) 2つのベクトル $\vec{a}=(3, 7)$, $\vec{b}=(-5, -2)$ のなす角 θ を求めよ。(2) $\vec{a}=(2, -4)$, $\vec{b}=(5+x, 3+x)$ が垂直であるとき、 x の値を求めよ。

解答

$$(1) \cos \theta = \frac{3 \times (-5) + 7 \times (-2)}{\sqrt{3^2 + 7^2} \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2}} = \frac{-29}{\sqrt{58} \sqrt{29}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 135^\circ$$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times (5+x) + (-4) \times (3+x) = 10 + 2x - 12 - 4x = -2x - 2$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \text{ となるには, } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ となればよいので } -2x - 2 = 0 \quad \text{よって } x = -1$$

10

 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{a}+2\vec{b}|=7$ のとき、 \vec{a} と \vec{b} のなす角 θ を求めよ。ただし、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。

解答

$$|\vec{a}+2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 3^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 \times 4^2 = 73 + 4\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\text{これと, } |\vec{a}+2\vec{b}|=7 \text{ から } 73 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 49 \quad \text{よって } \vec{a} \cdot \vec{b} = -6$$

$$\text{したがって } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-6}{3 \cdot 4} = -\frac{1}{2} \quad 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 120^\circ$$

11

3点 $O(0, 0)$, $A(2, -4)$, $B(5, -3)$ を頂点とする三角形の面積 S を求めよ。

解答

$$\vec{OA}=(2, -4), \vec{OB}=(5, -3) \text{ であるから}$$

$$|\vec{OA}|^2 = 2^2 + (-4)^2 = 20, \quad |\vec{OB}|^2 = 5^2 + (-3)^2 = 34$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 2 \times 5 + (-4) \times (-3) = 22$$

$$\text{よって } S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{OA}|^2 |\vec{OB}|^2 - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{20 \times 34 - 22^2} = 7$$

$$\text{別解 } \vec{OA}=(2, -4), \vec{OB}=(5, -3) \text{ であるから}$$

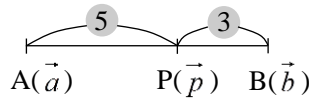
$$S = \frac{1}{2} |2 \times (-3) - (-4) \times 5| = 7$$

12

- (1) 2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB に対して, 次の点の位置ベクトルを \vec{a} , \vec{b} を用いてそれぞれ表せ。
 ① 5:3 に内分する点 $P(\vec{p})$ ② 中点 $M(\vec{m})$ ③ 5:3 に外分する点 $Q(\vec{q})$
- (2) 3点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle ABC$ において, 重心を G とする。 $\triangle GBC$ の重心 $G'(\vec{g}')$ を, \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。

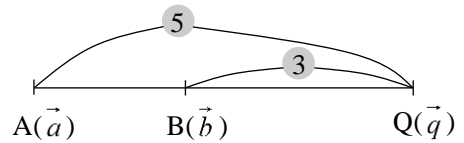
解答

(1) ① $\vec{p} = \frac{3\vec{a}+5\vec{b}}{5+3} = \frac{3\vec{a}+5\vec{b}}{8}$



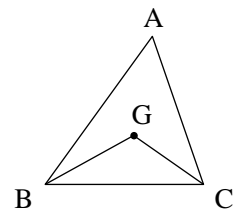
② $\vec{m} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

③ $\vec{q} = \frac{-3\vec{a}+5\vec{b}}{5-3} = \frac{-3\vec{a}+5\vec{b}}{2}$



(2) 点 $G(\vec{g})$ とすると $\vec{g} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

よって, $\triangle GBC$ の重心 $G'(\vec{g}')$ は $\vec{g}' = \frac{\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} + \vec{b} + \vec{c}}{3} = \frac{\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{c}}{9}$



13

△ABC において、辺 AB を 1 : 3 に内分する点を P、辺 BC を 6 : 1 に外分する点を Q、辺 AC を 2 : 1 に内分する点を R とするとき、3 点 P、R、Q は一直線上にあることを証明せよ。

証明

$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とすると

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}\vec{c}$$

よって $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{b} = \frac{1}{12}(-3\vec{b} + 8\vec{c})$

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AB} + \frac{6}{5}\overrightarrow{BC}$$

$$= \vec{b} + \frac{6}{5}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{-\vec{b} + 6\vec{c}}{5}$$

よって $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \frac{-\vec{b} + 6\vec{c}}{5} - \frac{1}{4}\vec{b} = \frac{-4\vec{b} + 24\vec{c} - 5\vec{b}}{20} = \frac{3}{20}(-3\vec{b} + 8\vec{c})$

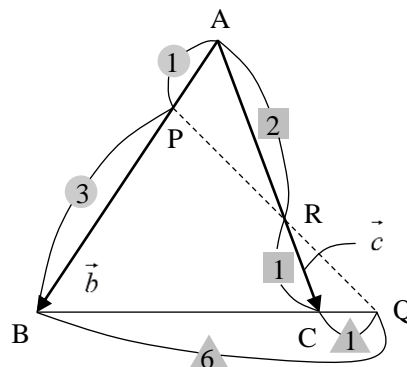
したがって、 $\overrightarrow{PQ} = \frac{9}{5}\overrightarrow{PR}$ であるから、3 点 P、R、Q は一直線上にある。

別証明 (メネラウスの定理の逆を用いる。)

△ABC の辺またはその延長上の 3 点 P、R、Q に対して

$$\frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} \cdot \frac{AP}{PB} = \frac{6}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = 1$$

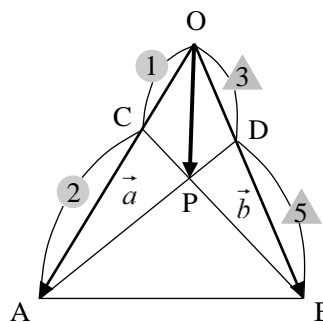
よって、メネラウスの定理の逆により、3 点 P、R、Q は一直線上にある。



14

△OABにおいて、辺OAを1:2に内分する点をC、辺OBを3:5に内分する点をDとし、線分ADとBCの交点をPとする。

$\vec{OA} = \vec{a}$ 、 $\vec{OB} = \vec{b}$ とするとき、 \vec{OP} を \vec{a} 、 \vec{b} を用いて表せ。



解答

点Pは線分AD上にあるから、実数 s を用いて $AP:PD = s:(1-s)$

$$\text{とすると } \vec{OP} = s\vec{OD} + (1-s)\vec{OA} = (1-s)\vec{a} + \frac{3}{8}s\vec{b} \quad \cdots\cdots\text{①}$$

また、点Pは線分BC上にあるから、実数 t を用いて $BP:PC = t:(1-t)$

$$\text{とすると } \vec{OP} = (1-t)\vec{OB} + t\vec{OC} = \frac{1}{3}t\vec{a} + (1-t)\vec{b} \quad \cdots\cdots\text{②}$$

$$\text{①, ②から } (1-s)\vec{a} + \frac{3}{8}s\vec{b} = \frac{1}{3}t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$$

$$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \nparallel \vec{b} \text{ であるから } \begin{cases} 1-s = \frac{1}{3}t \\ \frac{3}{8}s = 1-t \end{cases}$$

$$\text{これを解くと } s = \frac{16}{21}, t = \frac{5}{7} \quad \text{したがって } \vec{OP} = \frac{5}{21}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b}$$

15

△ABCにおいて、外心をOとし、点Hを

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$$

を満たす点とする。

このとき、点Hは△ABCの垂心であることを証明せよ。

証明

$$\begin{aligned} \vec{AH} \cdot \vec{BC} &= (\vec{OH} - \vec{OA}) \cdot (\vec{OC} - \vec{OB}) = (\vec{OB} + \vec{OC}) \cdot (\vec{OC} - \vec{OB}) \\ &= |\vec{OC}|^2 - |\vec{OB}|^2 \end{aligned} \quad \dots\dots①$$

$$\begin{aligned} \vec{BH} \cdot \vec{CA} &= (\vec{OH} - \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} - \vec{OC}) = (\vec{OA} + \vec{OC}) \cdot (\vec{OA} - \vec{OC}) \\ &= |\vec{OA}|^2 - |\vec{OC}|^2 \end{aligned} \quad \dots\dots②$$

$$\begin{aligned} \vec{CH} \cdot \vec{AB} &= (\vec{OH} - \vec{OC}) \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) = (\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) \\ &= |\vec{OB}|^2 - |\vec{OA}|^2 \end{aligned} \quad \dots\dots③$$

点Oは△ABCの外心であるから $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}|$

よって、①、②、③より

$$|\vec{OC}|^2 - |\vec{OB}|^2 = 0, \quad |\vec{OA}|^2 - |\vec{OC}|^2 = 0, \quad |\vec{OB}|^2 - |\vec{OA}|^2 = 0$$

したがって $\vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0, \quad \vec{BH} \cdot \vec{CA} = 0, \quad \vec{CH} \cdot \vec{AB} = 0$

ここで、点Hが△ABCの各頂点と異なる点のとき、すなわち、 $\vec{AH} \neq \vec{0}, \vec{BH} \neq \vec{0}, \vec{CH} \neq \vec{0}$ のとき

$$\vec{AH} \perp \vec{BC}, \quad \vec{BH} \perp \vec{CA}, \quad \vec{CH} \perp \vec{AB}$$

また、点Hが点Aに一致するとき、 $\vec{BH} \cdot \vec{CA} = 0, \vec{CH} \cdot \vec{AB} = 0$ より $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$

よって、△ABCは $\angle A = 90^\circ$ の直角三角形で、垂心は点Aである。

同様に、点Hが点Bに一致するとき、△ABCは $\angle B = 90^\circ$ の直角三角形で、垂心は点B、

点Hが点Cに一致するとき、△ABCは $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形で、垂心は点Cである。

以上より、点Hは△ABCの垂心である。

$\begin{aligned} \vec{OH} &= \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} \text{ から} \\ \vec{OH} - \vec{OA} &= \vec{OB} + \vec{OC} \\ \vec{OH} - \vec{OB} &= \vec{OA} + \vec{OC} \\ \vec{OH} - \vec{OC} &= \vec{OA} + \vec{OB} \end{aligned}$

16

- (1) 点 A(1, 0) を通り, 方向ベクトルが $\vec{u}=(5, -3)$ である直線 l を, 媒介変数 t を用いて表示せよ。
また, 直線 l の方程式を求めよ。
- (2) 2点 (2, -4), B(5, -3) を通る直線 l を, 媒介変数 t を用いて表示せよ。
また, 直線 l の方程式を求めよ。
- (3) 点 A(0, 1) を通り, 法線ベクトルが $\vec{n}=(5, -3)$ である直線 l の方程式を求めよ。
- (4) 定点 A(\vec{a}) と動点 P(\vec{p}) に対して, 次のベクトル方程式で表される円の中心の位置ベクトルと半径を求めよ。
- ① $|\vec{p} + 3\vec{a}| = 1$ ② $\vec{p} \cdot (\vec{p} - 2\vec{a}) = 0$

解答

- (1) 直線 l 上の任意の点を P(x, y) とし, 点 P の位置ベクトルを \vec{p} とすると, $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}$ から

$$(x, y) = (1, 0) + t(5, -3) = (1+5t, -3t) \quad \text{よって} \quad \begin{cases} x = 1+5t \\ y = -3t \end{cases}$$

$$5t = x - 1 \quad \text{から} \quad t = \frac{1}{5}x - \frac{1}{5} \quad \text{したがって, 求める直線 } l \text{ の方程式は} \quad y = -\frac{3}{5}x + \frac{3}{5}$$

- (2) 直線 l 上の任意の点を P(x, y) とし, 点 P の位置ベクトルを \vec{p} とすると, $\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$ から

$$(x, y) = (1-t)(2, -4) + t(5, -3) = (2(1-t) + 5t, -4(1-t) - 3t) = (2+3t, -4+t)$$

$$\text{よって} \quad \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = t - 4 \end{cases}$$

$$3t = x - 2 \quad \text{から} \quad t = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \quad \text{したがって, 求める直線 } l \text{ の方程式は} \quad y = \frac{1}{3}x - \frac{14}{3}$$

- (3) 直線 l 上の任意の点を P(x, y) とし, 点 P の位置ベクトルを \vec{p} とすると, $\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$ から

$$(5, -3) \cdot ((x, y) - (0, 1)) = (5, -3) \cdot (x, y-1) = 5x - 3(y-1) = 5x - 3y + 3$$

よって, 求める直線 l の方程式は $5x - 3y + 3 = 0$

〈注意〉点 A の座標を (x_1, y_1) , 点 P の座標を (x, y) , $\vec{n} = (a, b)$ とすると, $\vec{p} - \vec{a} = (x - x_1, y - y_1)$ から

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

となる。これを本問に用いると $5(x-0) - 3(y-1) = 0$ よって $5x - 3y + 3 = 0$

- (4) ① 中心の位置ベクトルは $-\vec{3a}$, 半径は 1

② $\vec{p} \cdot (\vec{p} - 2\vec{a}) = 0$ を変形すると $\vec{p} \cdot \vec{p} - 2\vec{p} \cdot \vec{a} = 0$

両辺に $\vec{a} \cdot \vec{a}$ を加えると $\vec{p} \cdot \vec{p} - 2\vec{p} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{a}$

これから $|\vec{p} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2$ すなわち $|\vec{p} - \vec{a}| = |\vec{a}|$

したがって, 中心の位置ベクトルは \vec{a} , 半径は $|\vec{a}|$

$|\vec{p} - \vec{a}|^2 = \sim$
という形になるよう
に変形する。

$\vec{p} \cdot (\vec{p} - 2\vec{a}) = 0$ は, $\vec{0}$, $2\vec{a}$ を直径の両端とする円になっている。

一般に, $(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$ は, \vec{a} , \vec{b} を直径の両端とする円のベクトル方程式である。

17

$\triangle OAB$ に対して、 $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ とする。実数 s, t が次の条件を満たしながら動くとき、点 P の存在範囲を求めよ。

(1) $s+3t=2, s \geq 0, t \geq 0$

(2) $s+3t \leq 2, s \geq 0, t \geq 0$

解答

(1) $s+3t=2$ より $\frac{s}{2} + \frac{3}{2}t = 1$

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = \frac{s}{2}(2\overrightarrow{OA}) + \frac{3}{2}t\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right)$$

ここで、 $\frac{s}{2} = s', \frac{3}{2}t = t'$ とおくと

$$\overrightarrow{OP} = s'(2\overrightarrow{OA}) + t'\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right) \quad s' + t' = 1, s' \geq 0, t' \geq 0$$

したがって、 $2\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}$ となるような点 A' 、 $\frac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$ となるような点 B' をとると、点 P の

存在範囲は線分 $A'B'$ である。

(2) $s+3t \leq 2$ より $\frac{s}{2} + \frac{3}{2}t \leq 1$

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = \frac{s}{2}(2\overrightarrow{OA}) + \frac{3}{2}t\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right)$$

ここで、 $\frac{s}{2} = s', \frac{3}{2}t = t'$ とおくと

$$\overrightarrow{OP} = s'(2\overrightarrow{OA}) + t'\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right) \quad s' + t' \leq 1, s' \geq 0, t' \geq 0$$

したがって、 $2\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}$ となるような点 A' 、 $\frac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$ となるような点 B' をとると、点 P の

存在範囲は $\triangle OA'B'$ の周上および内部である。

