

複素数と方程式

- 1** 次の計算をせよ。ただし、 i は虚数単位とする。
 〈注意〉以後、特に断りがない限り、 i は虚数単位を表すものとする。

(1) $(6-2i)(-3+4i)$ (2) $\frac{\sqrt{-72}}{\sqrt{-8}}$ (3) $\left(\frac{1+2i}{2-i}\right)^2$

解答

(1) $(6-2i)(-3+4i) = -18 + 24i + 6i - 8i^2 = -18 + 30i + 8 = -10 + 30i$

(2) $\frac{\sqrt{-72}}{\sqrt{-8}} = \frac{\sqrt{72}i}{\sqrt{8}i} = \sqrt{9} = 3$

(3) まず、 $\frac{1+2i}{2-i}$ を計算する。

$$\frac{1+2i}{2-i} = \frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i+4i+2i^2}{4-i^2} = \frac{2+5i-2}{4+1} = \frac{5i}{5} = i$$

これより $\left(\frac{1+2i}{2-i}\right)^2 = i^2 = -1$

- 2** 次の等式を満たす実数 x , y を求めよ。

(1) $(5+2i)x + (2-2i)y = 16-2i$ (2) $(3+2i)(2x-yi) = 4+7i$

解答

(1) 与えられた等式の左辺を i について整理すると $5x+2y+(2x-2y)i = 16-2i$

x , y が実数であるから、 $5x+2y$, $2x-2y$ も実数である。

よって $\begin{cases} 5x+2y=16 \\ 2x-2y=-2 \end{cases}$ を満たす x , y を求めればよい。

連立方程式を解くと $x=2$, $y=3$

(2) $(3+2i)(2x-yi) = 6x-3yi+4xi-2yi^2$

これより、与えられた等式の左辺を i について整理すると $6x+2y+(4x-3y)i = 4+7i$

x , y が実数であるから、 $6x+2y$, $4x-3y$ も実数である。

よって $\begin{cases} 6x+2y=4 \\ 4x-3y=7 \end{cases}$ を満たす x , y を求めればよい。

連立方程式を解くと $x=1$, $y=-1$

3

(1) 次の2次方程式を解け。

① $3x^2+5x+3=0$

② $\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{6}=0$

(2) 次の2次方程式の解の種類を判別せよ。

① $4x^2+12x+9=0$

② $-11x^2+12x-4=0$

(3) 2次方程式 $x^2+2(k-1)x-k^2+3k+1=0$ が重解をもつような定数 k の値と、そのときの重解をすべて求めよ。

解答

(1) ① 解の公式より $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 36}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{11}i}{6}$

② 両辺に12を掛けると $4x^2+3x-2=0$ となるので、解の公式より

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2)}}{2 \cdot 4} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 32}}{8} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{8}$$

(2) ① $D=12^2-4 \cdot 4 \cdot 9=144-144=0$ であるから **重解をもつ**。② $D=12^2-4 \cdot (-11) \cdot (-4)=144-176=-32$ より、 $D < 0$ であるから **異なる2つの虚数解をもつ**。

(3) $D = \{2(k-1)\}^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-k^2 + 3k + 1) = 4(k^2 - 2k + 1) + 4k^2 - 12k - 4$
 $= 4k^2 - 8k + 4 + 4k^2 - 12k - 4 = 8k^2 - 20k = 4k(2k - 5)$

題意より、 $D=0$ となるときの k の値を求める。 $4k(2k-5)=0 \Rightarrow k=0, \frac{5}{2}$

$k=0$ のとき $x^2+2(0-1)x-0^2+3 \cdot 0+1=x^2+2x+1=0 \Rightarrow (x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1$

$k=\frac{5}{2}$ のとき $x^2+2\left(\frac{5}{2}-1\right)x-\left(\frac{5}{2}\right)^2+3 \cdot \frac{5}{2}+1=x^2+3x-\frac{25}{4}+\frac{15}{2}+1=x^2+3x+\frac{9}{4}=0$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$$

以上より $k=0$ のとき $x=-1$ 、 $k=\frac{5}{2}$ のとき $x=-\frac{3}{2}$

4 2次方程式 $2x^2 - 4x + 5 = 0$ の2つの解を α , β とするとき、次の値を求めよ。

(1) $(\alpha + 1)(\beta + 1)$ (2) $(\alpha - \beta)^2$ (3) $\alpha^3 + \beta^3$

解答

2次方程式の解と係数の関係により $\alpha + \beta = -\frac{-4}{2} = 2$, $\alpha\beta = \frac{5}{2}$

(1) $(\alpha + 1)(\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = \alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1 = \frac{5}{2} + 2 + 1 = \frac{11}{2}$

(2) $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 2^2 - 4 \cdot \frac{5}{2} = 4 - 10 = -6$

(3) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 2^3 - 3 \cdot \frac{5}{2} \cdot 2 = 8 - 15 = -7$

5

(1) 2つの数 $3 + 5i$, $3 - 5i$ を解にもつ2次方程式を1つ作れ。

(2) 2次方程式 $x^2 - 2x + 5 = 0$ の2つの解を α , β とするとき、次の2つの数を解にもつ2次方程式を1つ作れ。

① $2\alpha - 1$, $2\beta - 1$

② α^2 , β^2

(3) 和が7, 積が3である2つの数を求めよ。

解答

(1) $\alpha = 3 + 5i$, $\beta = 3 - 5i$ とする。

$$\alpha + \beta = (3 + 5i) + (3 - 5i) = 6, \quad \alpha\beta = (3 + 5i)(3 - 5i) = 9 - 25i^2 = 34$$

よって $x^2 - 6x + 34 = 0$

(2) 2次方程式の解と係数の関係により $\alpha + \beta = 2$, $\alpha\beta = 5$

① $(2\alpha - 1) + (2\beta - 1) = 2\alpha + 2\beta - 2 = 2(\alpha + \beta) - 2 = 2 \cdot 2 - 2 = 2$

$$(2\alpha - 1)(2\beta - 1) = 4\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta + 1 = 4\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 1 = 4 \cdot 5 - 2 \cdot 2 + 1 = 20 - 4 + 1 = 17$$

よって $x^2 - 2x + 17 = 0$

② $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 2^2 - 2 \cdot 5 = 4 - 10 = -6$, $\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = 5^2 = 25$

よって $x^2 + 6x + 25 = 0$

(3) 2つの数を α , β とおくと $\alpha + \beta = 7$, $\alpha\beta = 3$

よって, α , β を解にもつ2次方程式は $x^2 - 7x + 3 = 0$

$$\text{解の公式により } x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 12}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{37}}{2}$$

したがって, 2つの数は $\frac{7 + \sqrt{37}}{2}$, $\frac{7 - \sqrt{37}}{2}$

6

2次方程式 $x^2 - (m+2)x + 5 = 0$ が、異なる2つの正の解をもつように実数 m の値の範囲を定めよ。

解答

2次方程式 $x^2 - (m+2)x + 5 = 0$ の判別式を D 、2つの解を α 、 β とすると

$$D = \{-(m+2)\}^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = m^2 + 4m + 4 - 20 = m^2 + 4m - 16, \quad \alpha + \beta = m+2, \quad \alpha\beta = 5$$

$D > 0$, $\alpha + \beta > 0$, $\alpha\beta > 0$ を満たせばよい。

(i) $D > 0$ すなわち $m^2 + 4m - 16 > 0$

$$m^2 + 4m - 16 = 0 \text{ の解は } m = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (-16)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 64}}{2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{5}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{5}$$

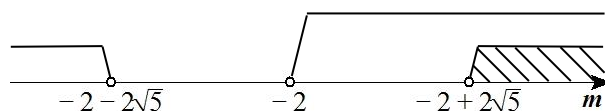
したがって $m < -2 - 2\sqrt{5}$, $-2 + 2\sqrt{5} < m$

(ii) $\alpha + \beta > 0$ すなわち $m + 2 > 0$ よって $m > -2$

(iii) $\alpha\beta > 0$

$\alpha\beta = 5$ より $\alpha\beta > 0$ を満たしている。

以上のことから、右の数直線より $m > -2 + 2\sqrt{5}$



7

(1) 多項式 $x^3 + 1$ を $x - 2$ で割ったときの余りを求めよ。

(2) 多項式 $P(x)$ を、 $x - 2$, $x + 1$ で割ったときの余りがそれぞれ -2 , 1 のとき、 $P(x)$ を $x^2 - x - 2$ で割ったときの余りを求めよ。

解答

(1) $P(x) = x^3 + 1$ とおく。

剰余の定理により、求める余りは $P(2) = 2^3 + 1 = 8 + 1 = 9$

(2) 2次式 $x^2 - x - 2$ で割ったときの余りは1次式または定数となるので $ax + b$ とおける。

$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$ より、 $P(x)$ を2次式 $(x - 2)(x + 1)$ で割ったときの商を Q とすると

$$P(x) = (x - 2)(x + 1)Q + ax + b$$

と表すことができる。

剰余の定理により $P(2) = -2$, $P(-1) = 1$ であるから

$$2a + b = -2, \quad -a + b = 1$$

これらを連立させて解くと $a = -1$, $b = 0$ よって、求める余りは $-x$

8 次の方程式を解け。

(1) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

(2) $x^3 + x^2 + 4 = 0$

解答

(1) $x^2 = A$ とおくと $x^4 = (x^2)^2$ より与えられた方程式は

$$A^2 - 3A - 4 = 0$$

と表すことができる。

$$A^2 - 3A - 4 = (A + 1)(A - 4) = 0 \text{ より } A = -1, 4$$

$A = x^2$ であるから $x^2 = -1, 4$ したがって $x = \pm i, \pm 2$

〈注意〉置き換えることによって2次方程式に変換できる高次方程式を、複2次方程式（または複2次式）という。

(2) $P(x) = x^3 + x^2 + 4$ とおくと $(-2)^3 + (-2)^2 + 4 = -8 + 4 + 4 = 0$ より $P(-2) = 0$

右の組立除法により

$$P(x) = (x + 2)(x^2 - x + 2)$$

$P(x) = 0$ から $x + 2 = 0$ または $x^2 - x + 2 = 0$

解の公式により

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

したがって $x = -2, \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ & & -2 & 2 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}$$

9

(1) 方程式 $x^3 + ax + 2 = 0$ の1つの解が $x = 2$ であるとき、実数 a の値を求めよ。また、そのときの他の解を求めよ。

(2) 方程式 $x^3 + ax^2 + bx - 6 = 0$ の1つの解が $x = 1 + \sqrt{2}i$ であるとき、実数 a, b の値を求めよ。また、そのときの他の解を求めよ。

解答

(1) 与えられた方程式に $x = 2$ を代入すると

$$2^3 + a \cdot 2 + 2 = 8 + 2a + 2 = 0 \text{ よって } a = -5$$

方程式 $x^3 - 5x + 2 = 0$ は $x = 2$ を解にもつから

右の組立除法により $(x - 2)(x^2 + 2x - 1) = 0$

$$\text{解の公式により } x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

したがって $a = -5$, 他の解は $x = -1 \pm \sqrt{2}$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & -5 & 2 \\ & & 2 & 4 & -2 \\ \hline & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

(2) この方程式は $x=1-\sqrt{2}i$ も解にもつ。

$$x=1\pm\sqrt{2}i \Rightarrow x-1=\pm\sqrt{2}i \xrightarrow{\text{両辺2乗する}} (x-1)^2=(\pm\sqrt{2}i)^2$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1=-2 \Rightarrow x^2-2x+3=0$$

これより、 x^3+ax^2+bx-6 は x^2-2x+3 で割り切れる。

右の計算により商と余りが求まる。

割り切れるので余りは0であるから

$$\{(b-3)+2(a+2)\}x-6-3(a+2)=0$$

$$\begin{cases} b+2a+1=0 \\ -3a-12=0 \end{cases}$$

これを解くと $a=-4, b=7$

$$\begin{aligned} \text{よって } x^3-4x^2+7x-6 &= (x^2-2x+3)\{x+(-4+2)\} \\ &= (x^2-2x+3)(x-2)=0 \end{aligned}$$

したがって $a=-4, b=7$, 他の解は $x=1-\sqrt{2}i, 2$

$$\begin{array}{r} x+(a+2) \\ x^2-2x+3 \overline{) x^3+ax^2+bx-6} \\ \underline{x^3-2x^2+3x} \\ (a+2)x^2+(b-3)x-6 \\ \underline{(a+2)x^2-2(a+2)x+3(a+2)} \\ \{(b-3)+2(a+2)\}x-6-3(a+2) \end{array}$$

別解1 $x=1+\sqrt{2}i$ を方程式 $x^3+ax^2+bx+10=0$ に代入する。

$$\begin{aligned} &(1+\sqrt{2}i)^3+a(1+\sqrt{2}i)^2+b(1+\sqrt{2}i)-6 \\ &=1^3+3\cdot 1^2\cdot\sqrt{2}i+3\cdot 1\cdot(\sqrt{2}i)^2+(\sqrt{2}i)^3+a\{1+2\sqrt{2}i+(\sqrt{2}i)^2\}+b+\sqrt{2}bi-6 \\ &=1+3\sqrt{2}i-6-2\sqrt{2}i+a+2\sqrt{2}ai-2a+b+\sqrt{2}bi-6 \\ &=-a+b-11+(2\sqrt{2}a+\sqrt{2}b+\sqrt{2})i=0 \\ &\begin{cases} -a+b-11=0 \\ 2\sqrt{2}a+\sqrt{2}b+\sqrt{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a+b-11=0 \\ 2a+b+1=0 \end{cases} \end{aligned}$$

これを解くと $a=-4, b=7$

方程式 $x^3-4x^2+7x-6=0$ を解くと $x=2, 1\pm\sqrt{2}i$

したがって $a=-4, b=7$, 他の解は $x=2, 1-\sqrt{2}i$

別解2 この方程式は $x=1-\sqrt{2}i$ も解にもつ。 $\alpha=1+\sqrt{2}i, \beta=1-\sqrt{2}i, x=1\pm\sqrt{2}i$ 以外の解を γ とおき、3次方程式の解と係数の関係を用いる。

$$\begin{cases} (1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)+\gamma=-a & \dots\text{①} \\ (1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)\gamma+\gamma(1+\sqrt{2}i)=b & \dots\text{②} \\ (1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)\gamma=6 & \dots\text{③} \end{cases}$$

③より $3\gamma=6$ よって $\gamma=2$

①より $2+2=-a$ よって $a=-4$

②より $3+2(1-\sqrt{2}i)+2(1+\sqrt{2}i)=b$ よって $b=7$

以上より $a=-4, b=7$, 他の解は $x=1-\sqrt{2}i, 2$