式と証明

1

(1)　次の式を展開せよ。

①　$(x+1)(x^2-x+1)$　　②　$(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$

③　$(x+3)^3$　　④　$(3a-2b)^3$

(2)　次の式を因数分解せよ。

①　x^3+27　　②　$8a^3-125$　　③　x^6+1

解答

(1)　①　$(x+1)(x^2-x+1)=(x+1)(x^2-x\cdot 1+1^2)=x^3+1^3=\boldsymbol{x^3+1}$

②　$(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)=(2a)^3-b^3=\boldsymbol{8a^3-b^3}$

③　$(x+3)^3=x^3-3\cdot x^2\cdot 3+3\cdot x\cdot 3^2-3^3=\boldsymbol{x^3-9x^2+27x-27}$

④　$(3a-2b)^3=(3a)^3-3\cdot(3a)^2\cdot 2b+3\cdot 3a\cdot(2b)^2-(2b)^3=\boldsymbol{27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3}$

(2)　①　$x^3+27=x^3+3^3=(x+3)(x^2-x\cdot 3+3^2)=\boldsymbol{(x+3)(x^2-3x+9)}$

②　$8a^3-125=(2a)^3-5^3=(2a-5)\{(2a)^2+2a\cdot 5+5^2\}=\boldsymbol{(2a-5)(4a^2+10a+25)}$

③　$x^6+1=(x^2)^3+1^3=(x^2+1)\{(x^2)^2-x^2\cdot 1+1^2\}=\boldsymbol{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}$

2

(1)　①　$(a+b)^5$ を，パスカルの三角形を利用して展開せよ。

②　$(a+b)^5$ を，二項定理を利用して展開せよ。

(2)　$(x-3y)^6$ における x^2y^4 の係数を求めよ。

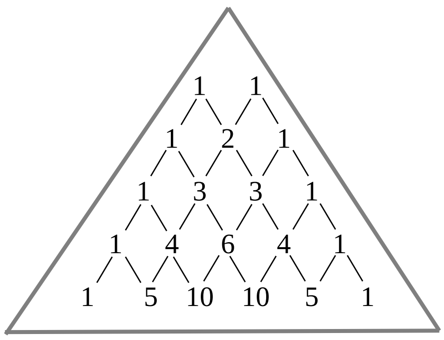
(3)　$(a+b+c)^7$ の展開式における a^4b^3 の係数を求めよ。

解答

(1)　①　右の三角形より

$(a+b)^5=1a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+1b^5$

$=\boldsymbol{a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5}$



②　$(a+b)^5$

$={}_5C_0a^5b^0+{}_5C_1a^4b^1+{}_5C_2a^3b^2+{}_5C_3a^2b^3+{}_5C_4a^1b^4+{}_5C_5a^0b^5$

$=\boldsymbol{a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5}$

(2)　$(x-3y)^6$ の展開式の一般項は

${}_6C_rx^{6-r}(-3y)^r={}_6C_r(-3)^rx^{6-r}y^r$

$x^{6-r}y^r$ が x^2y^4 となるのは　$r=4$　　よって，求める係数は　${}_6C_4\cdot(-3)^4=15\cdot 81=\mathbf{1215}$

(3)　$a^4b^3=a^4b^3c^0$ より，求める係数は　$\dfrac{7!}{4!3!0!}=\dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 1}=\mathbf{35}$

$\boxed{3}$

(1)　整式 $A=x^3+2x^2+3x+4$ を整式 $B=x^2+3$ で割った商と余りを求めよ。

(2)　整式 $A=x^3+2x^2+3x+4$ を整式 B で割ると，商が $x+1$，余りが 2 であった。整式 B を求めよ。

解答

(1)

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & x & & +2 & \\ \cline{2-5}
x^2+3\,\big) & x^3 & +2x^2 & +3x & +4 \\
 & x^3 & & +3x & \\ \cline{2-5}
 & & 2x^2 & & +4 \\
 & & 2x^2 & & +6 \\ \cline{3-5}
 & & & & -2
\end{array}
$$

よって，**商は $x+2$，余りは -2**

(2)　$x^3+2x^2+3x+4=B(x+1)+2$

これから

$B(x+1)=x^3+2x^2+3x+4-2$

$=x^3+2x^2+3x+2$

よって　$\boldsymbol{B=x-1}$

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & x^2 & +x & +2 & \\ \cline{2-5}
x+1\,\big) & x^3 & +2x^2 & +3x & +2 \\
 & x^3 & +x^2 & & \\ \cline{2-5}
 & & x^2 & +3x & +2 \\
 & & x^2 & +x & \\ \cline{3-5}
 & & & 2x & +2 \\
 & & & 2x & +2 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

$\boxed{4}$

(1)　次の分数式を既約分数式にせよ。

①　$\dfrac{9xy^2}{12y^3}$　　②　$\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$

(2)　次の計算をせよ。

①　$\dfrac{x^2-9}{2y}\times\dfrac{y^2}{2x^2-9x+9}$　　②　$\dfrac{x^2+5x+6}{x+1}\div\dfrac{2x^2-6x-20}{3x+3}$

(3)　次の計算をせよ。

①　$\dfrac{x^2-7}{x+7}+\dfrac{6x}{x+7}$　　②　$\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}$

(4)　次の式を簡単にせよ。

①　$\dfrac{3x+6}{1+\dfrac{2}{x}}$　　②　$1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}$

解答

(1)　①　$\dfrac{9xy^2}{12y^3}=\dfrac{3x\times 3y^2}{4y\times 3y^2}=\boldsymbol{\dfrac{3x}{4y}}$

②　$\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\dfrac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\boldsymbol{\dfrac{x}{x-1}}$

(2)　①　$\dfrac{x^2-9}{2y}\times\dfrac{y^2}{2x^2-9x+9}=\dfrac{(x-3)(x+3)\times y^2}{2y\times(x-3)(2x-3)}=\boldsymbol{\dfrac{y(x+3)}{2(2x-3)}}$

②　$\dfrac{x^2+5x+6}{x+1}\div\dfrac{2x^2-6x-20}{3x+3}=\dfrac{(x+2)(x+3)}{x+1}\times\dfrac{3(x+1)}{2(x+2)(x-5)}=\boldsymbol{\dfrac{3(x+3)}{2(x-5)}}$

(3)　①　$\dfrac{x^2-7}{x+7}+\dfrac{6x}{x+7}=\dfrac{x^2+6x-7}{x+7}=\dfrac{(x+7)(x-1)}{x+7}=\boldsymbol{x-1}$

②　$\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}=\dfrac{x^2+x+1-3}{(x-1)(x^2+x+1)}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\boldsymbol{\dfrac{x+2}{x^2+x+1}}$

(4)　①　$\dfrac{3x+6}{1+\dfrac{2}{x}}=(3x+6)\div\left(1+\dfrac{2}{x}\right)=3(x+2)\div\dfrac{x+2}{x}=3(x+2)\times\dfrac{x}{x+2}=\boldsymbol{3x}$

②　$1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}=1-\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=1-\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)-1}=1-\dfrac{\dfrac{x-1}{x}}{-\dfrac{1}{x}}=1-\{-(x-1)\}=\boldsymbol{x}$

$\boxed{\text{別解}}$　$1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{x-1}{x}}}=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}}=1-\dfrac{1}{\dfrac{(x-1)-x}{x-1}}=1-\dfrac{1}{\dfrac{-1}{x-1}}=1-\{-(x-1)\}=x$

$\boxed{5}$

次の等式が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ。

(1)　$(a+1)x^2+bx+c=cx^2+ax+2$

(2)　$ax^2+b(x+1)(x-1)+cx=x^2+2x+3$

(3)　$\dfrac{1}{x^2(x-1)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}$

解答

(1)　両辺の同じ次数の項の係数を比較して　$a+1=c$，$b=a$，$c=2$

よって　$\boldsymbol{a=1}$**，**$\boldsymbol{b=1}$**，**$\boldsymbol{c=2}$

(2)　左辺を展開して整理すると　$ax^2+b(x+1)(x-1)+cx=ax^2+b(x^2-1)+cx=(a+b)x^2+cx-b$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$\begin{cases} a+b=1 \\ c=2 \\ -b=3 \end{cases}$　これを解いて　$\boldsymbol{a=4}$，$\boldsymbol{b=-3}$，$\boldsymbol{c=2}$

別解　与えられた等式が恒等式なら，x にどんな値を代入しても成り立つから，a，b，c が求めやすい x の値を代入してみる。

$x=0$ を代入すると　$b\cdot(-1)=3$　　よって　$b=-3$

$x=1$ を代入すると　$a+c=1+2+3$　　よって　$a+c=6$　……①

$x=-1$ を代入すると　$a-c=1-2+3$　　よって　$a-c=2$　……②

①，②から　$a=4$，$c=2$　　したがって　$a=4$，$b=-3$，$c=2$

このとき，等式が恒等式になることを確かめる。

$$(\text{左辺})=4x^2-3(x+1)(x-1)+2x=4x^2-3x^2+3+2x=x^2+2x+3=(\text{右辺})$$

したがって，与えられた等式は恒等式である。

(3)　両辺に $x^2(x-1)$を掛けて得られる等式　$1=ax^2+bx(x-1)+c(x-1)$

も恒等式である。右辺を展開して整理すると

$$ax^2+bx(x-1)+c(x-1)=ax^2+b(x^2-x)+cx-c=(a+b)x^2+(-b+c)x-c$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$\begin{cases} 0=a+b \\ 0=-b+c \\ 1=-c \end{cases}$　これを解いて　$\boldsymbol{a=1}$，$\boldsymbol{b=-1}$，$\boldsymbol{c=-1}$

別解　$1=ax^2+bx(x-1)+c(x-1)$ の両辺は 2 次以下の整式であるので，3 個の x の値，例えば $x=0$，$x=1$，$x=-1$ を代入して a，b，c の値を求めてもよい。

6

(1)　等式$(x+y)^3-3xy(x+y)=x^3+y^3$ を証明せよ。

(2)　①　$a+b+c=0$ のとき，等式 $a^2-b^2-c^2-2bc=0$ が成り立つことを証明せよ。

②　$\dfrac{a+b}{3}=\dfrac{b+c}{4}=\dfrac{c+a}{5}\neq 0$ のとき，$\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$ の値を求めよ。

解答

(1)　$(\text{左辺})=(x+y)^3-3xy(x+y)=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3-3x^2y-3xy^2=x^3+y^3=(\text{右辺})$

(2)　①　$a+b+c=0$ より，$c=-a-b$ であるから

$$(\text{左辺})=a^2-b^2-(-a-b)^2-2b(-a-b)=a^2-b^2-(a^2+2ab+b^2)+2ab+2b^2=0=(\text{右辺})$$

別解　$a^2-b^2-c^2-2bc$ を因数分解すると

$$a^2-b^2-c^2-2bc=a^2-(b^2+2bc+c^2)=a^2-(b+c)^2=\{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\}$$
$$=(a+b+c)(a-b-c)$$

よって，$a+b+c=0$ のとき　$a^2-b^2-c^2-2bc=0$

② $\dfrac{a+b}{3}=\dfrac{b+c}{4}=\dfrac{c+a}{5}=k$ とおくと　$a+b=3k$ ……①，　$b+c=4k$ ……②，　$c+a=5k$ ……③

①＋②＋③から　$2a+2b+2c=12k$

よって　$a+b+c=6k$ ……④

④－②，④－③，④－①から

$a=2k,\ b=k,\ c=3k$

これらを，$\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$ に代入すると

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}=\frac{2k\cdot k+k\cdot 3k+3k\cdot 2k}{(2k)^2+k^2+(3k)^2}=\frac{11k^2}{14k^2}$$

$k\neq 0$ であるから，求める値は　$\boldsymbol{\dfrac{11}{14}}$

> ①－② から　$a-c=-k$　　これと③ から
> $a=2k,\ c=3k$　　① から　$b=k$　　としてもよい。
> 解答の，辺々を加えて先に $a+b+c$ を求めてから
> $a,\ b,\ c$ を求める方法も覚えておきたい。

7

(1)　$a<b$，$x<y$ のとき，不等式 $ax+by>bx+ay$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　①　不等式$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

②　不等式 $a^2+b^2+c^2\geqq ab+bc+ca$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

証明

(1)　$ax+by-bx-ay=a(x-y)-b(x-y)=(a-b)(x-y)$

$a<b$，$x<y$ から　$a-b<0$，$x-y<0$　　よって　$(a-b)(x-y)>0$　　したがって　$ax+by>bx+ay$

(2)　①　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-a^2x^2-2abxy-b^2y^2$

$=a^2y^2-2abxy+b^2x^2=(ay-bx)^2\geqq 0$

よって　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$　　等号が成り立つのは，$ay=bx$ のときである。

②　$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=\dfrac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\dfrac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$(a-b)^2\geqq 0$，$(b-c)^2\geqq 0$，$(c-a)^2\geqq 0$ であるから　$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\geqq 0$

よって　$a^2+b^2+c^2\geqq ab+bc+ca$

等号が成り立つのは，$a-b=0$ かつ $b-c=0$ かつ $c-a=0$　　すなわち，$a=b=c$ のときである。

8

(1)　$a>0$，$b>0$ のとき，不等式 $\dfrac{3b}{2a}+\dfrac{6a}{b}\geqq 6$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(2)　$a>1$ のとき，$a+\dfrac{1}{a-1}$ の最小値を求めよ。また，そのときの a の値を求めよ。

解答

(1)　$a>0$，$b>0$ より，$\dfrac{3b}{2a}>0$，$\dfrac{6a}{b}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{3b}{2a}+\frac{6a}{b}\geqq 2\sqrt{\frac{3b}{2a}\cdot\frac{6a}{b}}=2\cdot 3=6 \qquad \text{よって}\quad \frac{3b}{2a}+\frac{6a}{b}\geqq 6$$

等号が成り立つのは　$\dfrac{3b}{2a}=\dfrac{6a}{b}$　すなわち，$b^2=4a^2$ のときであるが，$a>0$，$b>0$ より，$b=2a$ のときである。

(2)　$a+\dfrac{1}{a-1}=a-1+\dfrac{1}{a-1}+1$

$a>1$ より，$a-1>0$，$\dfrac{1}{a-1}>0$ であるから，

相加平均と相乗平均の大小関係により

$$a-1+\frac{1}{a-1}\geqq 2\sqrt{(a-1)\cdot\frac{1}{a-1}}=2\cdot 1=2 \qquad \text{よって}\quad a+\frac{1}{a-1}=a-1+\frac{1}{a-1}+1\geqq 2+1=3$$

等号が成り立つのは　$a-1=\dfrac{1}{a-1}$　すなわち，$(a-1)^2=1$　$a^2-2a=0$ のときであるが，

$a>1$ より，$a=2$ のときである。したがって，**$a=2$ のとき，$a+\dfrac{1}{a-1}$ の最小値は 3**

> 相加平均と相乗平均の大小関係を利用することを考慮して，$x+y\geqq 2\sqrt{xy}$ の中の，積 xy で約分して文字が消去できるように，与えられた式を調整する。

9

(1)　$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のとき，不等式 $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqq\sqrt{2(x+y)}$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(2)　不等式 $|x|+|y|\geqq\sqrt{x^2+y^2}$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

証明

(1)　$(\text{右辺})^2-(\text{左辺})^2=\{\sqrt{2(x+y)}\}^2-(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=2(x+y)-(x+2\sqrt{xy}+y)=x-2\sqrt{xy}+y=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geqq 0$

よって　$\{\sqrt{2(x+y)}\}^2\geqq(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$　すなわち　$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\leqq\{\sqrt{2(x+y)}\}^2$

$\sqrt{x}+\sqrt{y}\geqq 0$，$\sqrt{2(x+y)}\geqq 0$ であるから　$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqq\sqrt{2(x+y)}$

等号が成り立つのは　$\sqrt{x}=\sqrt{y}$　すなわち　$x=y$ のときである。

(2)　$(\text{左辺})^2-(\text{右辺})^2=(|x|+|y|)^2-(\sqrt{x^2+y^2})^2=(|x|^2+2|x||y|+|y|^2)-(x^2+y^2)$

$$=(x^2+2|xy|+y^2)-x^2-y^2=2|xy|\geqq 0$$

よって　$(|x|+|y|)^2\geqq(\sqrt{x^2+y^2})^2$　$|x|+|y|\geqq 0$，$\sqrt{x^2+y^2}\geqq 0$ であるから　$|x|+|y|\geqq\sqrt{x^2+y^2}$

等号が成り立つのは　$xy=0$　すなわち，$x=0$ または $y=0$ のときである。