

実数, 1次不等式

1

(1) 次の分数を小数で表せ。

① $\frac{1}{12}$

② $\frac{3}{16}$

(2) 次の循環小数を分数で表せ。

① $0.\dot{8}$

② $1.2\dot{3}$

解答

(1) ① $\frac{1}{12} = 0.08333\cdots = \mathbf{0.0\dot{8}3}$

$$\begin{array}{r} \text{①} \quad 0.083 \\ 12 \overline{)1.0} \\ \underline{96} \\ 4 \\ \underline{36} \\ 4 \end{array}$$

② $\frac{3}{16} = \mathbf{0.1875}$

$$\begin{array}{r} \text{②} \quad 0.1875 \\ 16 \overline{)3.0} \\ \underline{16} \\ 140 \\ \underline{128} \\ 120 \\ \underline{112} \\ 80 \\ \underline{80} \\ 0 \end{array}$$

(2) ① $x = 0.\dot{8}$ とおくと, $10x = 8.\dot{8}$ であるから

$$10x - x = 8$$

よって $x = \frac{8}{9}$

$$\begin{array}{r} 10x = 8.888\cdots \\ -) x = 0.888\cdots \\ \hline 9x = 8 \end{array}$$

② $x = 1.2\dot{3}$ とおくと, $100x = 123.2\dot{3}$ であるから

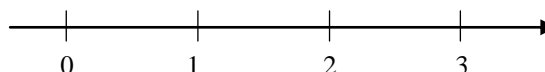
$$100x - x = 122$$

よって $x = \frac{122}{99}$

$$\begin{array}{r} 100x = 123.2323\cdots \\ -) x = 1.2323\cdots \\ \hline 99x = 122 \end{array}$$

2

(1) 右の数直線上に点 $P\left(\frac{7}{4}\right)$, $Q(\sqrt{3})$ をとれ。



(2) 次の値を求めよ。

① $\left| -\frac{1}{2} \right|$

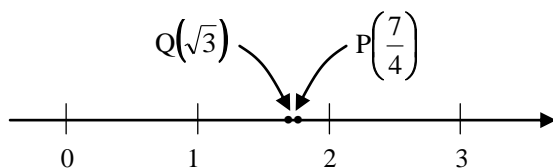
② $|\sqrt{2} - \sqrt{3}|$

③ $|1| - |-2|$

(3) $|2 + \sqrt{5}| |2 - \sqrt{5}|$ の値を求めよ。

解答

(1)



(2) ① $\left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$

② $\sqrt{2} - \sqrt{3} < 0$ であるから $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| = -\sqrt{2} + \sqrt{3}$

③ $|1| - |-2| = 1 - 2 = -1$

(3) $|2 + \sqrt{5}| |2 - \sqrt{5}| = |(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})|$
 $= |4 - 5| = |-1| = 1$

3

(1) 次の値を求めよ。

① $(-\sqrt{5})^2$

② $-\sqrt{3^2}$

(2) 次の式を簡単にせよ。

① $\sqrt{27}$

② $\sqrt{6} \sqrt{15}$

③ $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$

④ $\sqrt{0.12}$

解答

(1) ① $(-\sqrt{5})^2 = 5$

② $-\sqrt{3^2} = -|3| = -3$

(2) ① $\sqrt{27} = \sqrt{3^2 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$

② $\sqrt{6} \sqrt{15} = \sqrt{6 \cdot 15} = \sqrt{3^2 \cdot 10} = 3\sqrt{10}$

③ $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$

④ $\sqrt{0.12} = \sqrt{\frac{12}{100}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{2^2 \cdot 3}}{\sqrt{10^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{5}$

4

(1) 次の式を計算せよ。

① $\sqrt{54} + \sqrt{96}$

② $(3 - \sqrt{6})(3 + \sqrt{6})$

③ $(2 - \sqrt{2})^2$

④ $(1 + 2\sqrt{3})(3 - \sqrt{3})$

(2) 次の式の分母を有理化せよ。

① $\frac{2}{\sqrt{3}}$

② $\frac{1 - \sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

③ $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$

④ $\frac{3 - 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}}$

解答

- (1) ① $\sqrt{54} + \sqrt{96} = \sqrt{3^2 \cdot 6} + \sqrt{4^2 \cdot 6} = 3\sqrt{6} + 4\sqrt{6} = 7\sqrt{6}$
 ② $(3 - \sqrt{6})(3 + \sqrt{6}) = 3^2 - (\sqrt{6})^2 = 9 - 6 = 3$
 ③ $(2 - \sqrt{2})^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 4 - 4\sqrt{2} + 2 = 6 - 4\sqrt{2}$
 ④ $(1 + 2\sqrt{3})(3 - \sqrt{3}) = 1 \cdot 3 + \{1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3\} \sqrt{3} + \{2 \cdot (-1)\} (\sqrt{3})^2$
 $= 3 + 5\sqrt{3} - 2 \cdot 3 = -3 + 5\sqrt{3}$

別解 $(1 + 2\sqrt{3})(3 - \sqrt{3}) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-\sqrt{3}) + 2\sqrt{3} \cdot 3 + 2\sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3})$
 $= 3 - \sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 6 = -3 + 5\sqrt{3}$

- (2) ① $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
 ② $\frac{1 - \sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{(1 - \sqrt{6})\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{2}$
 ③ $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{2 - 5} = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{3}$
 ④ $\frac{3 - 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} = \frac{(3 - 2\sqrt{2})^2}{(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2}{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = \frac{9 - 12\sqrt{2} + 8}{9 - 8} = 17 - 12\sqrt{2}$

5

$a < b$ のとき，次の にあてはまる不等号を入れよ。

(1) $a + 5$ $b + 5$

(2) $3a$ $3b$

(3) $-\frac{1}{4}a$ $-\frac{1}{4}b$

(4) $\frac{a}{2} - 5$ $\frac{b}{2} - 5$

(5) $-2a + 6$ $-2b + 6$

解答

(1) $a + 5$ $b + 5$

(2) $3a$ $3b$

(3) $-\frac{1}{4}a$ $-\frac{1}{4}b$

(4) $a < b$ のとき， $\frac{a}{2} < \frac{b}{2}$ であり，この両辺から 5 を引いても不等号の向きは変わらないから

$$\frac{a}{2} - 5 < \frac{b}{2} - 5$$

(5) $a < b$ のとき， $-2a > -2b$ であり，この両辺に 6 を足しても不等号の向きは変わらないから

$$-2a + 6 > -2b + 6$$

6

次の不等式を解け。

- (1) $x+2 \leq -3$ (2) $-3x > -9$ (3) $2x-5 \geq -1$ (4) $-5x-3 < 7$
 (5) $2x+3 \geq -2x-5$ (6) $x+4 \leq 10+4x$ (7) $2(3x-1) > 3(4x+5)+1$ (8) $\frac{x+8}{6} < \frac{x}{4}+1$

解答

(1) $x+2 \leq -3$

移項して $x \leq -5$

(2) $-3x > -9$

両辺を -3 で割って $x < 3$

(3) $2x-5 \geq -1$

移項して $2x \geq 4$

両辺を 2 で割って $x \geq 2$

(4) $-5x-3 < 7$

移項して $-5x < 10$

両辺を -5 で割って $x > -2$

(5) $2x+3 \geq -2x-5$

移項して $2x+2x \geq -5-3$ 整理して $4x \geq -8$

両辺を 4 で割って $x \geq -2$

(6) $x+4 \leq 10+4x$

移項して $x-4x \leq 10-4$ 整理して $-3x \leq 6$

両辺を -3 で割って $x \geq -2$

(7) $2(3x-1) > 3(4x+5)+1$

かっこをはずして $6x-2 > 12x+15+1$

移項して $6x-12x > 15+1+2$ 整理して $-6x > 18$

両辺を -6 で割って $x < -3$

(8) $\frac{x+8}{6} < \frac{x}{4}+1$

両辺に 12 を掛けて $2(x+8) < 3x+12$

かっこをはずして $2x+16 < 3x+12$

移項して $2x-3x < 12-16$ 整理して $-x < -4$

両辺を -1 で割って $x > 4$

7

(1) 次の連立不等式を解け。

$$\textcircled{1} \begin{cases} x+6 \leq 4x \\ 1-3x < 15-5x \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} 2(x+6) \leq 3(4-x) \\ 0.7x+0.5 < x+2 \end{cases}$$

(2) 不等式 $x-2 < -\frac{1}{2}x+1 < -3x-4$ を解け。

解答

$$(1) \textcircled{1} \begin{cases} x+6 \leq 4x & \dots\dots(i) \\ 1-3x < 15-5x & \dots\dots(ii) \end{cases}$$

(i) から $-3x \leq -6$

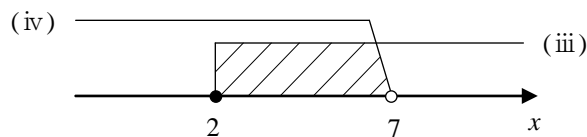
よって $x \geq 2$ $\dots\dots(iii)$

(ii) から $-3x+5x < 15-1$

よって $2x < 14$

これを解いて $x < 7$ $\dots\dots(iv)$

(iii) と (iv) の共通範囲を求めて $2 \leq x < 7$



$$\textcircled{2} \begin{cases} 2(x+6) \leq 3(4-x) & \dots\dots(i) \\ 0.7x+0.5 < x+2 & \dots\dots(ii) \end{cases}$$

(i) から $2x+12 \leq 12-3x$

よって $5x \leq 0$

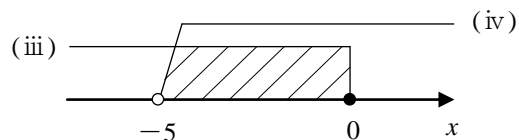
これを解いて $x \leq 0$ $\dots\dots(iii)$

(ii) から $7x+5 < 10x+20$

よって $-3x < 15$

これを解いて $x > -5$ $\dots\dots(iv)$

(iii) と (iv) の共通範囲を求めて $-5 < x \leq 0$



$$(2) \begin{cases} x-2 < -\frac{1}{2}x+1 & \dots\dots(i) \\ -\frac{1}{2}x+1 < -3x-4 & \dots\dots(ii) \end{cases}$$

(i) から $2x-4 < -x+2$

よって $3x < 6$

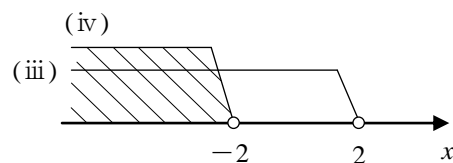
これを解いて $x < 2$ $\dots\dots(iii)$

(ii) から $-x+2 < -6x-8$

よって $5x < -10$

これを解いて $x < -2$ $\dots\dots(iv)$

(iii) と (iv) の共通範囲を求めて $x < -2$



8

次の方程式，不等式を解け。

(1) $|2x-5|=3$

(2) $|x+4|\leq 6$

(3) $|3x-1|>2$

解答

(1) $|2x-5|=3$ から $2x-5=\pm 3$

よって $2x=5\pm 3$ したがって $x=4, 1$

(2) $|x+4|\leq 6$ から $-6\leq x+4\leq 6$

したがって $-10\leq x\leq 2$

(3) $|3x-1|>2$ から $3x-1<-2, 2<3x-1$

よって $3x<-1, 3<3x$ したがって $x<-\frac{1}{3}, 1<x$

9

次の方程式，不等式を解け。

(1) $|x|=3x-2$

(2) $|3x-2|\geq x+2$

解答

(1) $|x|=3x-2$

(i) $x\geq 0$ のとき

$$x=3x-2$$

これを解いて $x=1$

これは $x\geq 0$ を満たす。

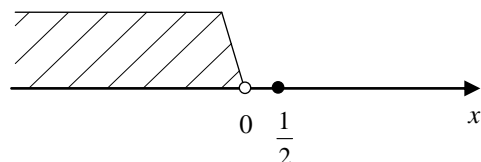
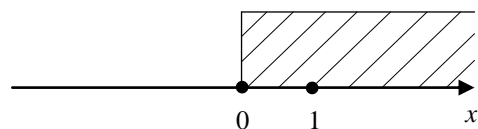
(ii) $x<0$ のとき

$$-x=3x-2$$

これを解いて $x=\frac{1}{2}$

これは $x<0$ を満たさない。

(i), (ii) から，方程式の解は $x=1$



研究2

次の式を簡単な形にせよ。

- (1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ (2) $\sqrt{7-2\sqrt{6}}$ (3) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ (4) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$

解答

(1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(2+1)+2\sqrt{2}\cdot 1} = \sqrt{2} + \sqrt{1} = \sqrt{2} + 1$

(2) $\sqrt{7-2\sqrt{6}} = \sqrt{(6+1)-2\sqrt{6}\cdot 1} = \sqrt{6} - \sqrt{1} = \sqrt{6} - 1$

(3) $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{7-2\sqrt{12}} = \sqrt{(4+3)-2\sqrt{4}\cdot 3} = \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$

(4) $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(3+1)+2\sqrt{3}\cdot 1}{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

研究3

$x = \frac{3-\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}$ ， $y = \frac{3+\sqrt{6}}{3-\sqrt{6}}$ のとき，次の式の値を求めよ。

- (1) $x+y$ ， xy (2) x^2+y^2 (3) x^3+y^3

解答

(1) $x+y = \frac{3-\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}} + \frac{3+\sqrt{6}}{3-\sqrt{6}} = \frac{(3-\sqrt{6})^2+(3+\sqrt{6})^2}{(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})} = \frac{9-6\sqrt{6}+6+9+6\sqrt{6}+6}{9-6} = 10$

$xy = \frac{3-\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}} \cdot \frac{3+\sqrt{6}}{3-\sqrt{6}} = 1$

(2) $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 10^2 - 2\cdot 1 = 98$

(3) $x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 10^3 - 3\cdot 1\cdot 10 = 1000 - 30 = 970$