

解答

線分 AD は $\angle BAC$ の二等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC = 2 : 4 = 1 : 2$$

よって $BD = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3} \times 3 = 1$

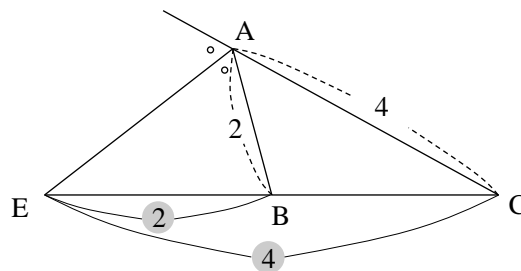
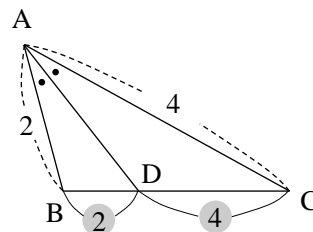
線分 AE は $\angle BAC$ の外角の二等分線であるから

$$BE : EC = AB : AC = 2 : 4 = 1 : 2$$

よって $EB : BC = 1 : 1$

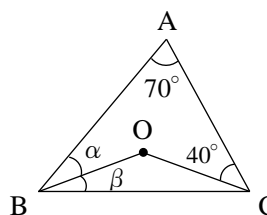
したがって $EB = BC = 3$

以上から $DE = BD + EB = 1 + 3 = 4$



4

右の図において、点 O は $\triangle ABC$ の外心である。
 α 、 β を求めよ。



解答

右の図のように、2点 A、O を結ぶ。

$$\angle OCA = \angle OAC \text{ より } \angle OAB = \angle A - \angle OAC = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$$

$$\angle OAB = \angle OBA \text{ より } \alpha = 30^\circ$$

$$\angle OBC = \angle OCB, \angle OCA + \angle A + \angle OBA + \angle OBC + \angle OCB = 180^\circ \text{ より}$$

$$40^\circ + 70^\circ + 30^\circ + \beta + \beta = 180^\circ$$

よって $\beta = 20^\circ$

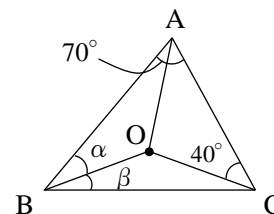
β の別解

$$\text{円周角の定理により } \angle BOC = 2 \times \angle A = 2 \times 70^\circ = 140^\circ$$

$$\angle OBC = \angle OCB, \angle OBC + \angle OCB + \angle BOC = 180^\circ \text{ より}$$

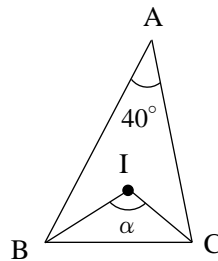
$$\beta + \beta + 140^\circ = 180^\circ$$

よって $\beta = 20^\circ$

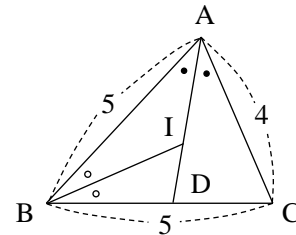


5

- (1) 右の図において、点Iは△ABCの内心である。
αを求めよ。



- (2) AB=5, BC=5, CA=4である△ABCにおいて、内心をI, 直線AIと辺BCとの交点をDとすると、AI : IDを求めよ。



解答

- (1) $\angle IBA = \angle IBC = x$, $\angle ICA = \angle ICB = y$ とおく。

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ より

$40^\circ + 2x + 2y = 180^\circ$

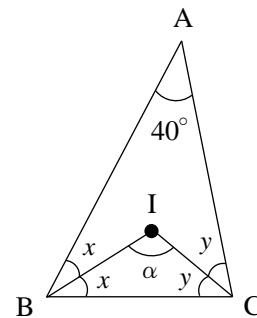
$40^\circ + 2(x+y) = 180^\circ$

よって $x + y = 70^\circ$

△IBCにおいて $\angle BIC + \angle IBC + \angle ICB = 180^\circ$

$\alpha + x + y = 180^\circ$

したがって $\alpha = 110^\circ$



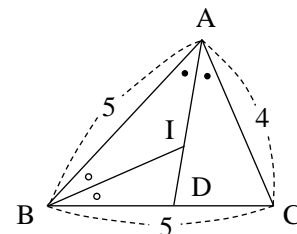
- (2) 直線AIは∠Aの二等分線であるから

$BD : DC = AB : AC = 5 : 4$

よって $BD = \frac{5}{9}BC = \frac{5}{9} \times 5 = \frac{25}{9}$

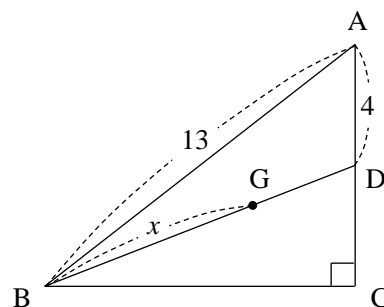
また、直線BIは∠Bの二等分線であるから

$AI : ID = BA : BD = 5 : \frac{25}{9} = 9 : 5$



6

- 右の図において、点Gは△ABCの重心、
∠C=90°である。
線分の長さxを求めよ。



解答

AD=DC より DC=4, AC=8

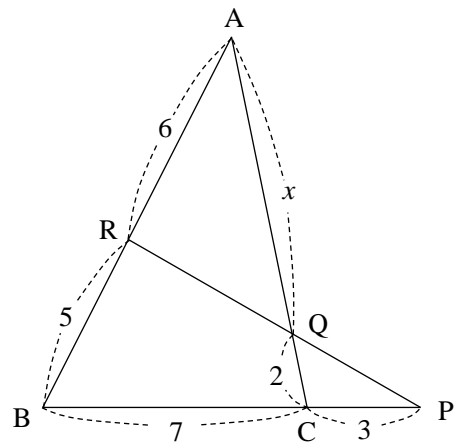
△ABC において, 三平方の定理により $BC = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{105}$

また, △DBC において, 三平方の定理により $BD = \sqrt{(\sqrt{105})^2 + 4^2} = 11$

BG : GD = 2 : 1 より $BG = \frac{2}{3}BD$ よって $x = \frac{2}{3} \times 11 = \frac{22}{3}$

7

右の図において, 線分の長さ x を求めよ。



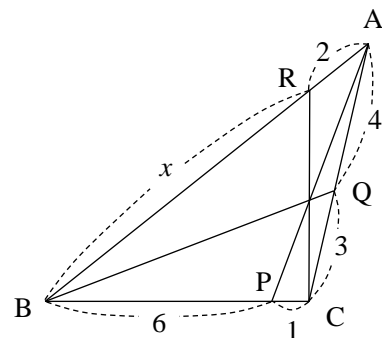
解答

メネラウスの定理により $\frac{7+3}{3} \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{6}{5} = 1$

よって $x=8$

8

右の図において, 線分の長さ x を求めよ。



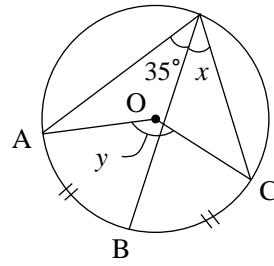
解答

チェバの定理により $\frac{6}{1} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{x} = 1$

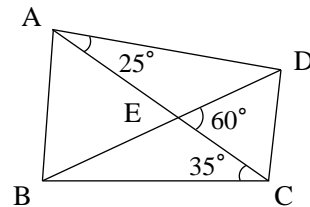
よって $x=9$

9

- (1) 右の図において、 x, y を求めよ。
 ただし、点 O は円の中心、 $\widehat{AB} = \widehat{BC}$ とする。



- (2) 右の図において、4点 A, B, C, D は同一円周上にあるといえるか。

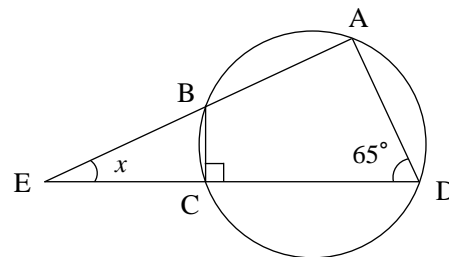


解答

- (1) 同じ弧に対する円周角の大きさは等しいから $x = 35^\circ$
 1つの弧に対する中心角の大きさは、その弧に対する円周角の2倍であるから
 $y = 2 \times (35^\circ + 35^\circ) = 140^\circ$
- (2) $\triangle ADE$ の内角と外角の関係より、 $\angle ADE = 60^\circ - 25^\circ = 35^\circ$ であるから $\angle ACB = \angle ADB$ によって、円周角の定理の逆により、4点 A, B, C, D は同一円周上にある。

10

右の図において、 x を求めよ。

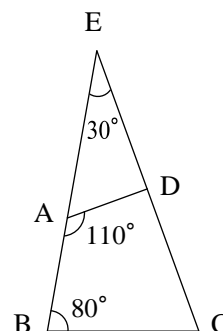


解答

$\angle BCD = \angle BAD = 90^\circ$ であるから、 $\triangle AED$ において $90^\circ + 65^\circ + x = 180^\circ$ より $x = 25^\circ$

11

右の四角形 $ABCD$ は、円に内接するか。



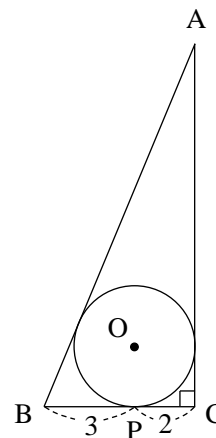
解答

$\triangle EAD$ の内角と外角の関係から $\angle ADE = 110^\circ - 30^\circ = 80^\circ$

よって、1つの外角が、それと隣り合う内角の対角に等しいから、**四角形 ABCD は円に内接する。**

12

右の図において、円 O は $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形 ABC の内接円、点 P は辺 BC と円 O との接点である。
 $BP = 3$, $CP = 2$ のとき、辺 AB, AC の長さを求めよ。



解答

円 O と辺 AC, AB の接点をそれぞれ Q, R とすると

$$BP = BR = 3$$

$$CP = CQ = 2$$

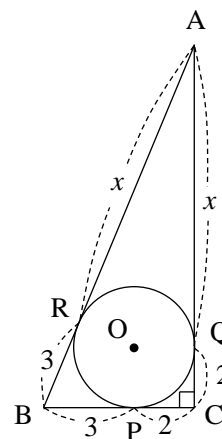
ここで、 $AQ = AR = x$ とおく。

$\triangle ABC$ において、三平方の定理により

$$(x+2)^2 + 5^2 = (x+3)^2 \quad x^2 + 4x + 4 + 25 = x^2 + 6x + 9$$

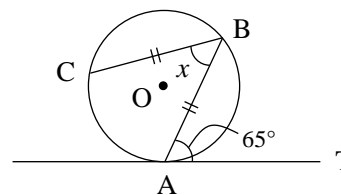
$$-2x = -20 \quad x = 10$$

したがって **AB = 13, AC = 12**



13

右の図において、直線 AT は円 O の点 A における接線であり、 $BC = BA$ である。 x を求めよ。



解答

2点 A, C を結ぶ。

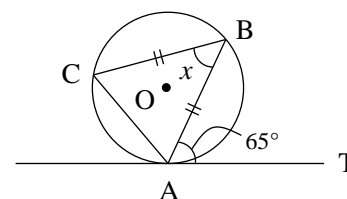
このとき、円の接線と弦の作る角の定理により $\angle BCA = 65^\circ$

また、 $BC = BA$ であるから $\angle BAC = 65^\circ$

よって、 $\triangle ABC$ において

$$\angle BCA + \angle BAC + \angle ABC = 180^\circ$$

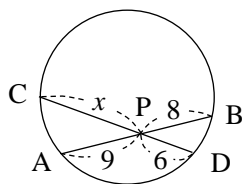
すなわち $65^\circ + 65^\circ + x = 180^\circ$ したがって **$x = 50^\circ$**



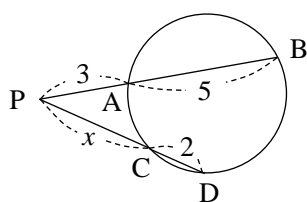
14

次の図において、 x の値を求めよ。ただし、(3)の直線PTは接点をTとする円の接線である。

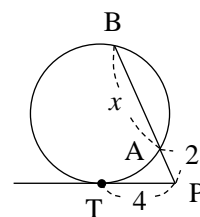
(1)



(2)



(3)



解答

(1) $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ から $9 \cdot 8 = x \cdot 6$ よって $x = 12$

(2) $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ から $3 \cdot (3+5) = x \cdot (x+2)$

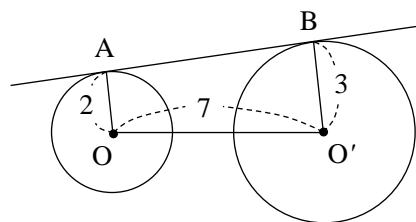
よって $x^2 + 2x - 24 = 0$ $(x-4)(x+6) = 0$ $x > 0$ より $x = 4$

(3) $PA \cdot PB = PT^2$ から $2(2+x) = 4^2$ よって $x = 6$

15

右の図において、直線ABは2つの円O, O'の共通接線で、点A, Bが接点である。

線分ABの長さを求めよ。



解答

点Oから線分O'Bに垂線OHを引く。

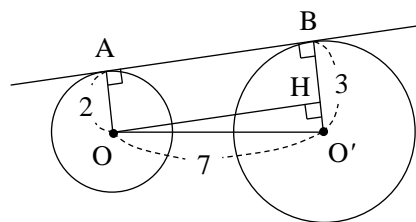
$OA \perp AB$, $O'B \perp AB$ であるから、四角形AOHBは長方形である。よって $AB = OH$, $OA = HB$

また $O'H = O'B - HB = 3 - 2 = 1$

直角三角形OO'Hにおいて、三平方の定理により

$$OH = \sqrt{OO'^2 - O'H^2} = \sqrt{7^2 - 1^2} = 4\sqrt{3}$$

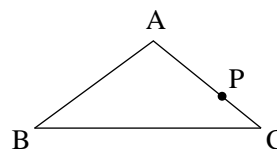
したがって $AB = OH = 4\sqrt{3}$



16

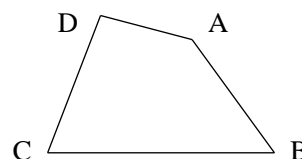
(1) $\triangle ABC$ と辺AC上の点Pが与えられている。

点Pを通り、 $\triangle ABC$ の面積を2等分する直線を作図せよ。



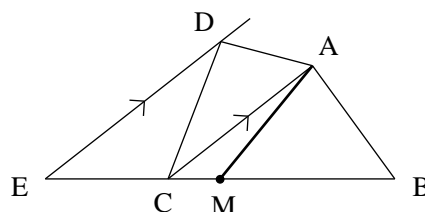
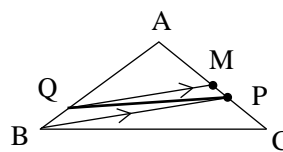
(2) 右の図のような四角形ABCDがある。

頂点Aを通り、四角形ABCDの面積を2等分する直線を作図せよ。



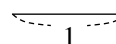
作図

- (1) ① 辺 AC の中点 M をとる。
 ② 点 M を通り、直線 BP に平行な直線と、
 辺 AB との交点を Q とする。
 ③ 点 P と点 Q を結んだ直線 PQ が求める
 直線である。
- (2) ① 頂点 D を通り、直線 AC に平行な直線と
 直線 BC の交点を E とする。
 ② 線分 BE の中点を M とする。
 ③ 頂点 A と点 M を結んだ直線 AM が求める
 直線である。



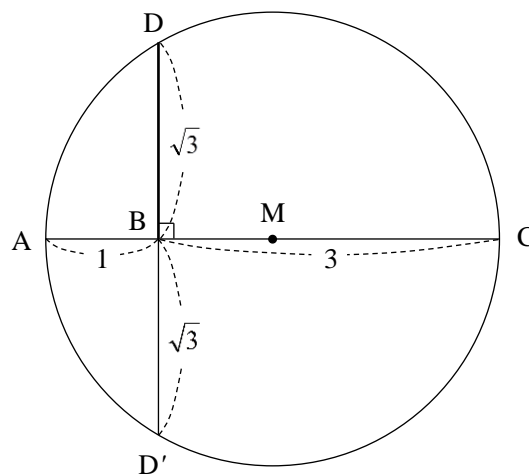
17

長さ 1 の線分が与えられているとき、長さ $\sqrt{3}$ の線分を作図せよ。



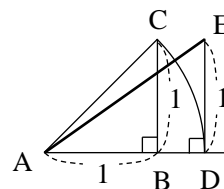
作図

- ① 同一直線上に $AB=1$, $BC=3$ となる
 ような 3 点 A, B, C を、この順にとる。
 ② 線分 AC の中点を M とし、M を中心
 とする半径 AM の円をかく。
 ③ 点 B を通り、直線 AC に垂直な直線
 と、②でかいた円との交点を D, D' と
 する。このとき、 $AB \cdot BC = BD \cdot BD'$ 、
 $BD = BD'$ より、線分 BD および BD' の
 長さが $\sqrt{3}$ である。



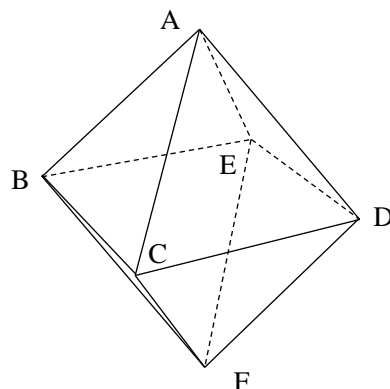
別解

- ① $AB=BC=1$, $\angle ABC=90^\circ$ の
 直角二等辺三角形 ABC をかく。
 ② 半直線 AB 上に、 $AC=AD$ と
 なる点 D をとる。
 ③ $DE=1$, $\angle ADE=90^\circ$ の直角
 三角形 ADE をかく。
 このとき、 $AD=\sqrt{2}$ より、線分
 AE の長さが $\sqrt{3}$ である。



18

右の図のような1辺が1である
正八面体 ABCDEF において、2直線
AB と EF のなす角を求めよ。

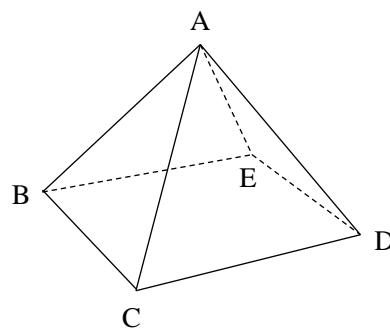


解答

AC//EF より、2直線 AB と EF のなす角は、2直線 AB と AC のなす角と同じである。
よって 60°

19

右の図のような、1辺が長さが1の
正四角錐 A-BCDE において、直線 AB
と平面 BCDE のなす角を θ とするとき、
 $\cos \theta$ の値を求めよ。



解答

直線 AB は平面 BCDE と点 B で交わる。
対角線 BD と CE の交点を O とすると

$$AO \perp BD, AO \perp CE$$

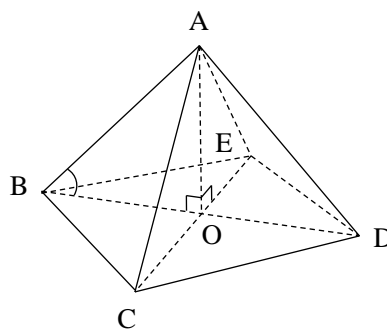
よって、点 A から平面 BCDE に引いた
垂線は AO であるから

$$\theta = \angle ABO$$

ここで $AB=1, BO = \frac{1}{2}BD = \frac{\sqrt{2}}{2}$

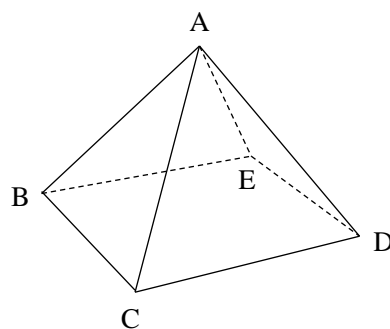
$$\text{したがって } \cos \theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

〈注意〉 すなわち、 $\angle ABO = 45^\circ$ である。



20

1 辺の長さが 1 の正四角錐 A-BCDE において、
平面 ABC と平面 BCDE のなす角を θ とする
とき、 $\cos \theta$ の値を求めよ。



解答

平面 ABC と平面 BCDE の交線は直線 BC である。

辺 BC の中点を M とする。

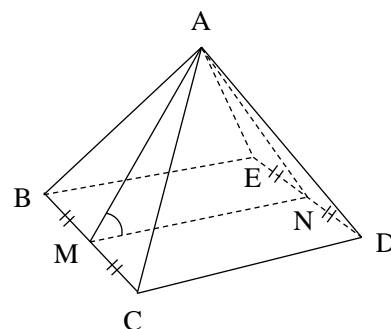
$\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形と考えること
ができる。よって $AM \perp BC$

辺 ED の中点を N とすると $BC \perp MN$

したがって $\theta = \angle AMN$

ここで、 $AM=AN=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 、 $MN=1$ であるから

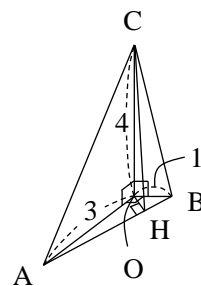
$$\cos \theta = \frac{MA^2 + MN^2 - AN^2}{2MA \cdot MN} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



21

互いに垂直な線分 OA, OB, OC があり、 $OA=3$, $OB=1$,
 $OC=4$ である。点 O から線分 AB に垂線 OH を引くとき、
次の問いに答えよ。

- (1) 線分 OH の長さを求めよ。
- (2) 線分 CH の長さを求めよ。
- (3) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。



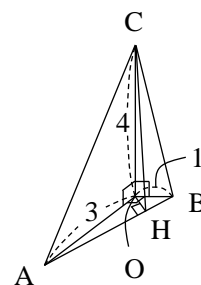
解答

(1) $\triangle OAB$ の面積に着目すると

$$\frac{1}{2} \times OA \times OB = \frac{1}{2} \times AB \times OH \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$OA=3$, $OB=1$, $AB = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ であるから

$$\textcircled{1} \text{より} \quad \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times OH \quad \text{よって} \quad OH = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$



(2) $\triangle OCH$ は $\angle COH=90^\circ$ の直角三角形であるから

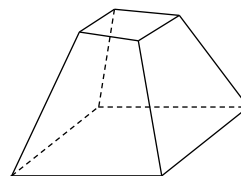
$$CH = \sqrt{OC^2 + OH^2} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2} = \frac{13}{\sqrt{10}} = \frac{13\sqrt{10}}{10}$$

(3) $OC \perp$ 平面 OAB , $OH \perp AB$ であるから, 三垂線の定理により $CH \perp AB$

したがって, $\triangle ABC$ の面積は $\frac{1}{2} \times AB \times CH = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \frac{13}{\sqrt{10}} = \frac{13}{2}$

22

右の図のような多面体において,
オイラーの多面体定理が成り立つ
ことを確かめよ。



解答

頂点の数 v は 8 個

辺の数 e は 12 本

面の数 f は 6 個

であるから $v - e + f = 8 - 12 + 6 = 2$ よって, オイラーの多面体定理は成り立つ。

研究

次の問いに答えよ。

(1) $\angle C=90^\circ$ である直角三角形 ABC において,
辺 BC 上の点を D とするとき,

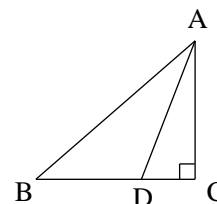
$$AB > AD$$

であることを証明せよ。

(2) 3 辺の長さが次のような三角形は存在するかどうかを調べよ。

① 3, 5, 7

② 1, 2, 3



解答

(1) $\triangle ABC$ において, $\angle C=90^\circ$ であるから $\angle B < \angle C$ ……①

$\angle ADB$ は $\triangle ADC$ の外角であるから $\angle ADB = \angle ACD + \angle CAD$

よって $\angle ADB > \angle C$ ……②

①, ②から $\angle ADB > \angle B$

したがって, 三角形の辺と角の大小関係により $AB > AD$

(2) ① $3 + 5 > 7, 5 + 7 > 3, 7 + 3 > 5$

であるから, 3 辺の長さが 3, 5, 7 の三角形は存在する。

② $3 = 1 + 2$ であるから, 3 辺の長さが 1, 2, 3 の三角形は存在しない。

