

## 図形と方程式

**1**

- (1) 数直線上の2点  $A(-10)$ ,  $B(-1)$  を結ぶ線分  $AB$  について、次の点の座標を求めよ。  
 ① 2:1 に内分する点      ② 中点      ③ 2:1 に外分する点
- (2) 座標平面上の2点  $A(0, -6)$ ,  $B(7, 0)$  を結ぶ線分  $AB$  について、次の点の座標を求めよ。  
 ① 中点      ② 3:4 に内分する点      ③ 3:4 に外分する点
- (3) 座標平面上の3点  $A(-1, 3)$ ,  $B(5, 0)$ ,  $C(a, b)$  を頂点とする  $\triangle ABC$  の重心が  $(3, 4)$  のとき、 $a, b$  をそれぞれ求めよ。

### 解答

(1) ①  $\frac{1 \cdot (-10) + 2 \cdot (-1)}{2+1} = -4$

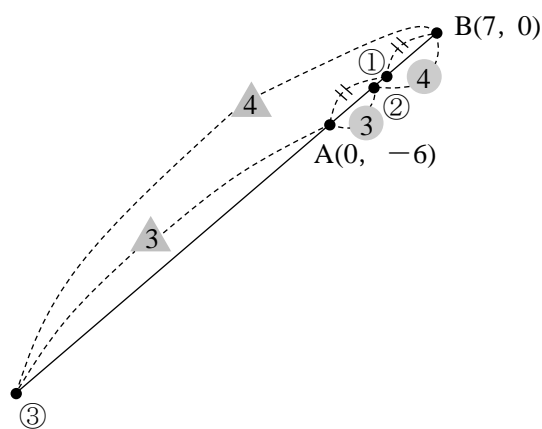
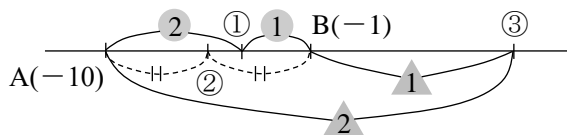
②  $\frac{-10 + (-1)}{2} = -\frac{11}{2}$

③  $\frac{(-1) \cdot (-10) + 2 \cdot (-1)}{2-1} = 8$

(2) ①  $\left(\frac{0+7}{2}, \frac{-6+0}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, -3\right)$

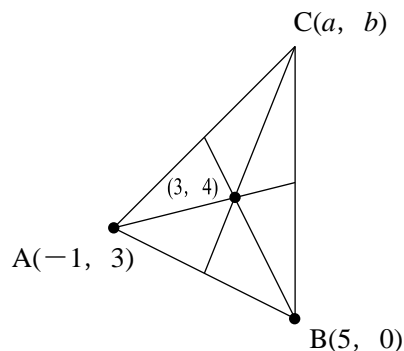
②  $\left(\frac{4 \cdot 0 + 3 \cdot 7}{3+4}, \frac{4 \cdot (-6) + 3 \cdot 0}{3+4}\right) = \left(3, -\frac{24}{7}\right)$

③  $\left(\frac{4 \cdot 0 + (-3) \cdot 7}{-3+4}, \frac{4 \cdot (-6) + 3 \cdot 0}{-3+4}\right) = (-21, -24)$



(3)  $\left(\frac{-1+5+a}{3}, \frac{3+0+b}{3}\right) = (3, 4)$  から  $\begin{cases} \frac{4+a}{3} = 3 \\ \frac{3+b}{3} = 4 \end{cases}$

これを解いて  $(a, b) = (5, 9)$



2 次の座標平面上の2点間の距離を求めよ。

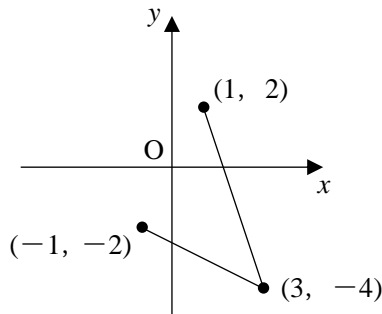
(1) (1, 2), (3, -4)

(2) (-1, -2), (3, -4)

解答

(1)  $\sqrt{(3-1)^2+(-4-2)^2} = 2\sqrt{10}$

(2)  $\sqrt{\{3-(-1)\}^2+\{-4-(-2)\}^2} = 2\sqrt{5}$



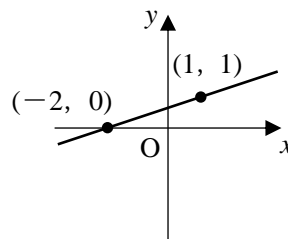
3 次の直線の方程式を求めよ。

(1) 2点(-2, 0), (1, 1)を通る直線

(2) 点(-2, 0)を通り、直線  $5x-y=0$  に垂直な直線

解答

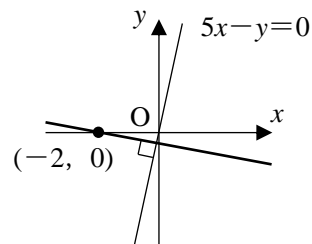
(1)  $y-0 = \frac{1-0}{1-(-2)} \{x-(-2)\}$  から  $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$



(2) 直線  $5x-y=0$  の傾きは  $y=5x$  より 5 であるから、  
求める直線の傾き  $m$  は

$$5 \cdot m = -1 \text{ から } m = -\frac{1}{5}$$

したがって  $y-0 = -\frac{1}{5} \{x-(-2)\}$  から  $y = -\frac{1}{5}x - \frac{2}{5}$



4

直線  $l: x+2y+3=0$  に関して、点  $A(4, 5)$  と対称な点  $B$  の座標を求めよ。

**解答**

点  $B$  の座標を  $(p, q)$  とする。

(i) 直線  $l$  の傾きは、 $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$  より  $-\frac{1}{2}$

直線  $AB$  の傾きは  $\frac{q-5}{p-4}$  であり、直線  $AB$  は

直線  $l$  に垂直であるから  $\frac{q-5}{p-4} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

すなわち  $q = 2p - 3$  ……①

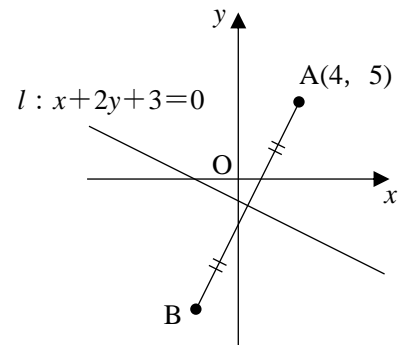
(ii) 線分  $AB$  の中点は  $\left(\frac{4+p}{2}, \frac{5+q}{2}\right)$

これが直線  $l$  上にあるから  $\frac{4+p}{2} + 2 \cdot \frac{5+q}{2} + 3 = 0$

すなわち  $p + 2q = -20$  ……②

①, ②を連立させて解くと  $p = -\frac{14}{5}, q = -\frac{43}{5}$

したがって、点  $B$  の座標は  $\left(-\frac{14}{5}, -\frac{43}{5}\right)$



5

(1) 次の点と直線の距離を求めよ。

①  $(2, 0), x-2y=0$

②  $(2, 1), x-2y+1=0$

(2) 座標平面上の3点  $A(-5, 1), B(-2, -4), C(1, -1)$  を頂点とする  $\triangle ABC$  の面積を求めよ。

解答

(1) ① 求める距離を  $d$  とすると  $d = \frac{|2-2 \cdot 0|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

② 求める距離を  $d$  とすると  $d = \frac{|2-2 \cdot 1+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

(2) 直線  $AB$  の方程式は  $y-1 = \frac{-4-1}{-2-(-5)}\{x-(-5)\}$  から

$$y = -\frac{5}{3}x - \frac{22}{3}$$

また、線分  $AB$  の長さは

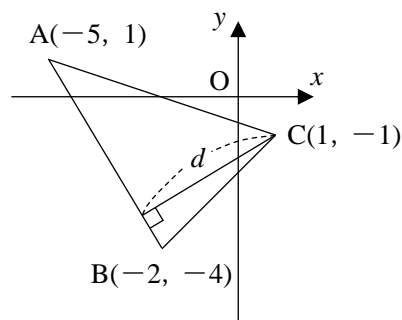
$$AB = \sqrt{\{-2-(-5)\}^2 + \{-4-1\}^2} = \sqrt{34}$$

$y = -\frac{5}{3}x - \frac{22}{3}$  を変形すると  $5x+3y+22=0$

よって、直線  $5x+3y+22=0$  と点  $C(1, -1)$  の距離  $d$  は

$$d = \frac{|5 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 22|}{\sqrt{5^2 + 3^2}} = \frac{24}{\sqrt{34}}$$

以上から  $\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{34} \cdot \frac{24}{\sqrt{34}} = 12$



6

- (1)  $x^2+y^2+5x+3y+4=0$  はどんな図形を表すか。  
 (2) 2点(3, 6), (-3, -2)を直径の両端とする円の方程式を求めよ。  
 (3)  $x$  軸,  $y$  軸に接し, 点(1, 2)を通る円の方程式を求めよ。  
 (4) 3点(1, -3), (-4, 2), (5, -1)を通る円の方程式を求めよ。

解答

(1)  $x^2+y^2+5x+3y+4=0$  を変形すると,  $x^2+5x+\frac{25}{4}+y^2+3y+\frac{9}{4}-\frac{25}{4}-\frac{9}{4}+4=0$  から

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2} \quad \text{よって, 中心}\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right), \text{半径}\frac{3\sqrt{2}}{2}\text{の円}$$

(2) 直径の midpoint が円の中心であるから

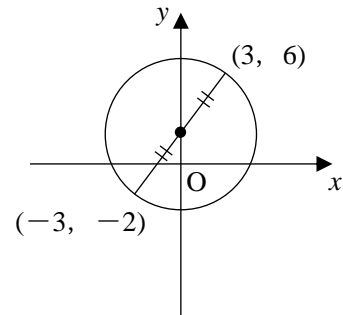
$$\left(\frac{3+(-3)}{2}, \frac{6+(-2)}{2}\right)=(0, 2)$$

また, 円の半径を  $r$  とすると,  $r^2$  は  
 2点(3, 6), (0, 2)の距離の2乗であるから

$$r^2=(0-3)^2+(2-6)^2=25$$

よって, 求める円の方程式は

$$x^2+(y-2)^2=25$$



(3) 点(1, 2)は第1象限の点であるから,  $x$  軸にも  $y$  軸にも  
 接する円の中心は,  $a > 0$  として,  $(a, a)$  とおける。

半径は  $a$  であるから, 求める円の方程式は

$$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$$

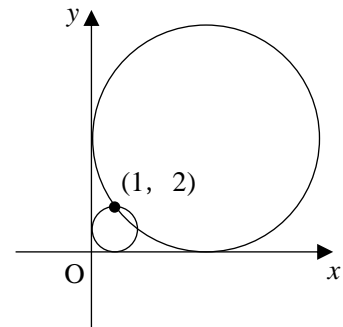
と表すことができる。

点(1, 2)を通ることから,  $(1-a)^2+(2-a)^2=a^2$  より

$$a^2-6a+5=0 \quad (a-1)(a-5)=0$$

よって  $a=1, 5$  したがって, 求める円の方程式は

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1, (x-5)^2+(y-5)^2=25$$



(4) 求める円の方程式を,  $x^2+y^2+lx+my+n=0$  とおく。この円は3点(1, -3), (-4, 2), (5, -1)を通るから

$$\begin{cases} 1+9+l-3m+n=0 \\ 16+4-4l+2m+n=0 \\ 25+1+5l-m+n=0 \end{cases} \quad \text{これらを整理すると} \quad \begin{cases} l-3m+n=-10 & \dots\dots ① \\ -4l+2m+n=-20 & \dots\dots ② \\ 5l-m+n=-26 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

$$①-② \text{ から } 5l-5m=10 \quad \dots\dots ④, \quad ①-③ \text{ から } -4l-2m=16 \quad \dots\dots ⑤$$

$$④, ⑤ \text{ を連立させて解くと } m=-4, l=-2 \quad ① \text{ から } n=-10-(-2)+3\cdot(-4)=-20$$

以上から, 求める円の方程式は  $x^2+y^2-2x-4y-20=0$

7

- (1) 円  $x^2+y^2-4x-6y+9=0$  と直線  $x-2y+2=0$  の共有点があるかどうか調べ、あればその座標を求めよ。
- (2)  $a$  を実数とする。円  $x^2+y^2=3$  と直線  $y=a(x-3)$  が接するときの  $a$  の値と、その接点の座標をすべて求めよ。

## 解答

$$(1) \quad x^2+y^2-4x-6y+9=0 \quad \cdots\cdots\textcircled{1}, \quad x-2y+2=0 \quad \cdots\cdots\textcircled{2}$$

とする。②を変形すると  $x=2y-2$  これを①に代入すると

$$(2y-2)^2+y^2-4(2y-2)-6y+9=0 \quad 4y^2-8y+4+y^2-8y+8-6y+9=0$$

$$5y^2-22y+21=0 \quad (y-3)(5y-7)=0 \quad y=3, \frac{7}{5}$$

$$\textcircled{2}\text{から, } y=3 \text{ のとき } x=4, \quad y=\frac{7}{5} \text{ のとき } x=\frac{4}{5}$$

よって、求める共有点は2個あり、その座標は  $(4, 3), \left(\frac{4}{5}, \frac{7}{5}\right)$

$$(2) \quad x^2+y^2=3 \text{ に } y=a(x-3) \text{ を代入すると } x^2+\{a(x-3)\}^2=3 \quad (1+a^2)x^2-6a^2x+9a^2-3=0 \quad \cdots\cdots\textcircled{1}$$

①の2次方程式が重解をもつとき、円と直線は接する。①の判別式を  $D$  とすると

$$D=(-6a^2)^2-4\cdot(1+a^2)\cdot(9a^2-3)=-24a^2+12$$

$$D=0 \text{ となるのは, } -24a^2+12=0 \text{ のときであるから, 求める } a \text{ の値は } a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{これを}\textcircled{1}\text{に代入すると } \frac{3}{2}x^2-3x+\frac{3}{2}=0 \quad \text{これを解いて } x=1$$

$$\text{ここで, } a=\frac{\sqrt{2}}{2}, x=1 \text{ のとき直線の方程式から } y=-\sqrt{2}, \quad a=-\frac{\sqrt{2}}{2}, x=1 \text{ のとき } y=\sqrt{2}$$

よって、求める接点の座標は  $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$  のとき  $(1, -\sqrt{2}), \quad a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$  のとき  $(1, \sqrt{2})$

**補足** 本問では座標まで求めなくてはいけないため、点と直線の距離の公式を用いる解法は適さない。

8

- (1) ① 円  $x^2+y^2=4$  上の点  $(\sqrt{3}, 1)$  における接線の方程式を求めよ。  
 ② 円  $x^2+y^2+2x+4y=0$  上の点  $(0, 0)$  における接線の方程式を求めよ。  
 (2) 点  $(1, 3)$  を通り、円  $x^2+y^2=2$  に接する直線の方程式を求めよ。

解答

(1) ①  $\sqrt{3}x+y=4$

②  $x^2+y^2+2x+4y=0$  を変形すると  $(x+1)^2+(y+2)^2=5$

よって、 $(x+1)^2+(y+2)^2=5$  上の点  $(0, 0)$  における接線の方程式は

$$(0+1)(x+1)+(0+2)(y+2)=5 \quad \text{すなわち} \quad x+2y=0$$

- (2) まず、求める直線と円の接点を  $(a, b)$  とおく。

よって、接線の方程式は  $ax+by=2$

これが、 $(1, 3)$  を通るから  $a+3b=2$  ……①

また、 $(a, b)$  は円上の点であるから  $a^2+b^2=2$  ……②

①を変形すると  $a=-3b+2$

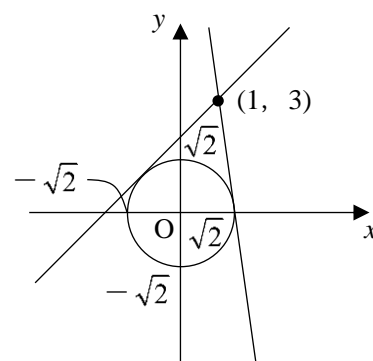
これを②に代入すると  $(-3b+2)^2+b^2=2$

整理すると、 $(b-1)(5b-1)=0$  から  $b=1, \frac{1}{5}$

①から、 $b=1$  のとき  $a=-1$ ,  $b=\frac{1}{5}$  のとき  $a=\frac{7}{5}$

求める接線の方程式は  $-x+y=2, \frac{7}{5}x+\frac{1}{5}y=2$  から

$$-x+y=2, 7x+y=10$$



9

2つの円  $x^2+y^2=1$ ,  $(x-2)^2+(y-3)^2=r^2$  が共有点をもたないように、定数  $r$  の値の範囲を定めよ。  
ただし、 $r>0$  とする。

**解答**

円  $x^2+y^2=1$  は、中心(0, 0), 半径 1

円  $(x-2)^2+(y-3)^2=r^2$  は、中心(2, 3), 半径  $r$

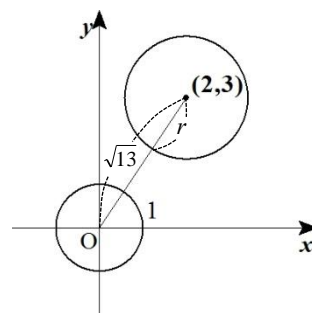
2つの円の中心間の距離を  $d$  とすると  $d=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

(i) 互いに外部にあるとき  $\sqrt{13}>1+r$  から  $r<\sqrt{13}-1$

(ii) 一方が他方を含むとき  $\sqrt{13}<r-1$  から  $r>\sqrt{13}+1$

(i), (ii)から、2つの円が共有点をもたない  $r$  の値の範囲は

$$0<r<\sqrt{13}-1, \sqrt{13}+1<r$$



10

点 A(1, 1), B(5, 3) であるとき、次の問いに答えよ。

(1) 2点 A, B から等距離にある点 P の軌跡を求めよ。

(2) 2点 A, B からの距離の比が 3 : 1 である点 Q の軌跡を求めよ。

**解答**

(1) 条件を満たす点を P(x, y) とすると

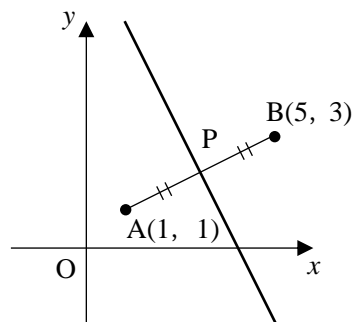
$$AP=BP \text{ から } AP^2=BP^2$$

$$\text{よって } (x-1)^2+(y-1)^2=(x-5)^2+(y-3)^2$$

$$\text{整理すると, } 8x+4y-32=0 \text{ から } y=-2x+8$$

以上から、求める点 P の軌跡は、直線  $y=-2x+8$  である。

**補足** 直線  $y=-2x+8$  は線分 AB の垂直二等分線である。



(2) 条件を満たす点を Q(x, y) とすると

$$AQ : BQ = 3 : 1 \text{ から } AQ = 3BQ$$

$$\text{よって } AQ^2 = 9BQ^2$$

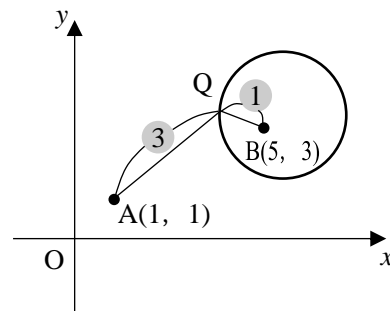
$$\text{したがって } (x-1)^2+(y-1)^2 = 9\{(x-5)^2+(y-3)^2\}$$

$$\text{整理すると, } 8x^2-88x+8y^2-52y+304=0 \text{ から}$$

$$\left(x-\frac{11}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{13}{4}\right)^2 = \frac{45}{16}$$

以上から、求める点 P の軌跡は、

点  $\left(\frac{11}{2}, \frac{13}{4}\right)$  を中心とし、半径が  $\frac{3\sqrt{5}}{4}$  の円である。





11

実数  $a$  の値が変化するとき、放物線  $y=x^2-2(a+1)x+2a$  の頂点の軌跡を求めよ。

**解答**

$y=x^2-2(a+1)x+2a$  を変形すると  $y=\{x-(a+1)\}^2-a^2-1$

頂点の座標を  $(x, y)$  とすると

$$x=a+1, y=-a^2-1$$

この2式から  $a$  を消去すると、 $a=x-1$  より  $y=-(x-1)^2-1=-x^2+2x-2$

よって、求める軌跡は **放物線  $y=-x^2+2x-2$**  である。

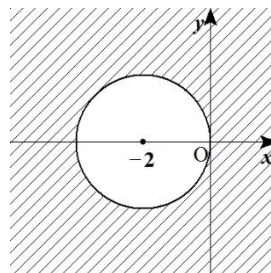
12 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)  $(x+2)^2+y^2 \geq 4$

(2)  $(x-y+6)(y-x^2) < 0$

**解答**

(1) 求める領域は円  $(x+2)^2+y^2=4$  の周およびその外部である。すなわち、右の図の斜線部分である。ただし、境界線を含む。

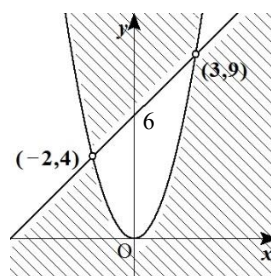


(2) 不等式  $(x-y+6)(y-x^2) < 0$  の表す領域は、

$$\begin{cases} x-y+6 > 0 \\ y-x^2 < 0 \end{cases} \text{ の表す領域と}$$

$$\begin{cases} x-y+6 < 0 \\ y-x^2 > 0 \end{cases}$$

の表す領域を合わせたもので、右の図の斜線部分である。ただし、境界線を含まない。



13

$x, y$  が 4 つの不等式  $x \geq 0, y \geq 0, 7x+3y-21 \leq 0, 2x+3y-12 \leq 0$  を満たすとき、 $3x+2y$  の最大値、最小値をそれぞれ求めよ。

**解答**

(1) 与えられた連立不等式の表す領域を  $D$  とする。

$$\begin{cases} 7x+3y-21=0 & \dots\dots ① \\ 2x+3y-12=0 & \dots\dots ② \end{cases} \text{をそれぞれ変形すると} \begin{cases} y=-\frac{7}{3}x+7 \\ y=-\frac{2}{3}x+4 \end{cases}$$

であり、①と②の交点は  $\left(\frac{9}{5}, \frac{14}{5}\right)$

であるから、 $D$  は右の図の斜線部分である。

ここで、 $3x+2y=k$  ……③とおくと、

$y=-\frac{3}{2}x+\frac{k}{2}$  と変形できるから、③は

傾きが  $-\frac{3}{2}$ 、 $y$  切片が  $\frac{k}{2}$  の直線を表す。

この直線③が領域  $D$  と共有点をもつような  $k$  の値の最大値と最小値を求めればよい。

図から、 $k$  は③が  $\left(\frac{9}{5}, \frac{14}{5}\right)$  を通るとき最大となり、 $(0, 0)$  を通るとき最小となる。

よって、 $3x+2y$  は  $x=\frac{9}{5}, y=\frac{14}{5}$  のとき最大値  $3 \cdot \frac{9}{5} + 2 \cdot \frac{14}{5} = 11$ ,

$x=0, y=0$  のとき最小値  $0+0=0$  をとる。

