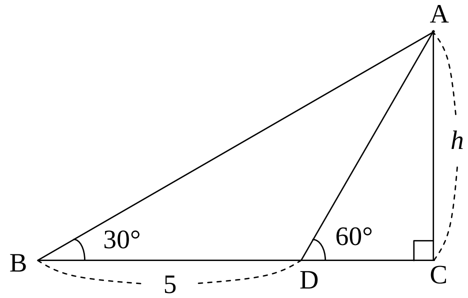
図形と計量

$\boxed{1}$
右の図の h を求めよ。



解答

△ADC において，DC：AC＝1：$\sqrt{3}$ から　DC：h＝1：$\sqrt{3}$　　これから　$DC=\dfrac{h}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}h$

△ABC において，AC：BC＝1：$\sqrt{3}$ から　$h:\left(5+\dfrac{\sqrt{3}}{3}h\right)=1:\sqrt{3}$

これから　$5+\dfrac{\sqrt{3}}{3}h=\sqrt{3}h$　　$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}h=5$ より　$\boldsymbol{h}=\dfrac{15}{2\sqrt{3}}\boldsymbol{=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}}$

別解　△ABD が AD＝DB＝5 の二等辺三角形であることを用いて，AD：AC＝2：$\sqrt{3}$ から求めることもできる。

$\boxed{2}$　次の三角比を求めよ。ただし，sin70°＝0.9397，cos70°＝0.3420 である。

(1)　sin20°　　(2)　sin110°　　(3)　cos160°

解答

(1)　90°－70°＝20°　であるから　　sin20°＝sin(90°－70°)＝cos70°＝**0.3420**

(2)　110°＝180°－70°　であるから　　sin110°＝sin(180°－70°)＝sin70°＝**0.9397**

(3)　160°＝180°－20°　であり，20°＝90°－70°　であるから

cos160°＝cos(180°－20°)＝－cos20°＝－cos(90°－70°)＝－sin70°＝**－0.9397**

$\boxed{3}$　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\tan\theta = \dfrac{1}{7}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(2)　$\sin\theta = \dfrac{15}{17}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

解答

(1)　$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から　$\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \left(\dfrac{1}{7}\right)^2 = \dfrac{50}{49}$　$\cos^2\theta = \dfrac{49}{50}$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$，$\tan\theta = \dfrac{1}{7} > 0$ であるから　$0° < \theta < 90°$　よって　$\cos\theta > 0$

したがって　$\boldsymbol{\cos\theta} = \sqrt{\dfrac{49}{50}} \boldsymbol{= \dfrac{7\sqrt{2}}{10}}$　また　$\boldsymbol{\sin\theta} = \tan\theta \cdot \cos\theta = \dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{7\sqrt{2}}{10} \boldsymbol{= \dfrac{\sqrt{2}}{10}}$

(2)　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から　$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\dfrac{15}{17}\right)^2 = \dfrac{64}{289}$

(ⅰ)　$\cos\theta > 0$ のとき

$\cos\theta = \sqrt{\dfrac{64}{289}} = \dfrac{8}{17}$　また　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{15}{17} \div \dfrac{8}{17} = \dfrac{15}{8}$

(ⅱ)　$\cos\theta < 0$ のとき

$\cos\theta = -\sqrt{\dfrac{64}{289}} = -\dfrac{8}{17}$　また　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{15}{17} \div \left(-\dfrac{8}{17}\right) = -\dfrac{15}{8}$

(ⅰ)，(ⅱ)から　$\boldsymbol{(\cos\theta,\ \tan\theta) = \left(\dfrac{8}{17},\ \dfrac{15}{8}\right),\ \left(-\dfrac{8}{17},\ -\dfrac{15}{8}\right)}$

$\boxed{4}$　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\sin\theta + \cos\theta = 0$ を満たす θ を求めよ。

(2)　$\sqrt{2}\sin\theta - 1 > 0$ を満たす θ の範囲を求めよ。

解答

(1)　$\sin\theta + \cos\theta = 0$ から　　$\sin\theta = -\cos\theta$

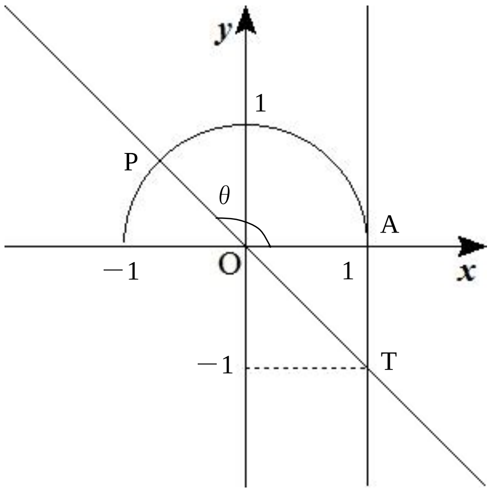
（ｉ）　$\cos\theta = 0$　すなわち　　$\theta = 90°$ のとき

$1 + 0 \neq 0$ より不適。

（ⅱ）　$\cos\theta \neq 0$　すなわち　　$\theta \neq 90°$ のとき

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = -1$　　　$\tan\theta = -1$

右の図のように，直線 $x=1$ 上に点 T(1，－1)をとり，直線 OT と半径 1 の半円の交点を P とすると，$\angle AOP = 135°$ である。



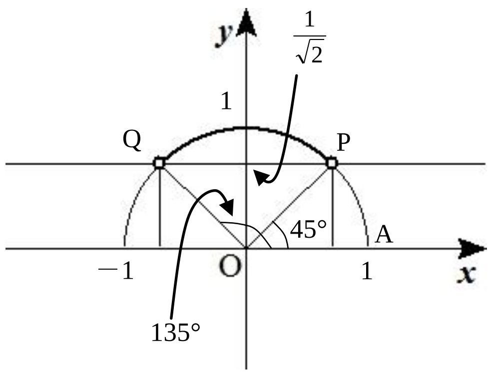
したがって　$\boldsymbol{\theta = 135°}$

(2)　$\sqrt{2}\sin\theta - 1 > 0$ から　　$\sin\theta > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

半径 1 の半円上で，y 座標が $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる点を P，Q とすると

$\angle AOP = 45°$，$\angle AOQ = 135°$

よって，右の図から $\sin\theta > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ の範囲は　$\boldsymbol{45° < \theta < 135°}$



$\boxed{5}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$，$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$ のとき，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ の値を求めよ。

解答

$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin\theta+\cos\theta)=\sin^3\theta+\sin^2\theta\cos\theta+\sin\theta\cos^2\theta+\cos^3\theta$ から

$$\sin^3\theta+\cos^3\theta=1\cdot(\sin\theta+\cos\theta)-\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$$
$$=(1-\sin\theta\cos\theta)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}(1-\sin\theta\cos\theta)$$

また，$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$ の両辺を 2 乗すると　$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{16}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{16}$ から　$2\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{15}{16}$ より　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{15}{32}$

以上から　$\boldsymbol{\sin^3\theta+\cos^3\theta}=-\dfrac{1}{4}\left\{1-\left(-\dfrac{15}{32}\right)\right\}\boldsymbol{=-\dfrac{47}{128}}$

$\boxed{\text{別解}}$　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$　や

$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$　を用いて求めてもよい。

$\boxed{6}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき，$y=-\sin^2\theta-\cos\theta$ の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの θ も求めよ。

解答

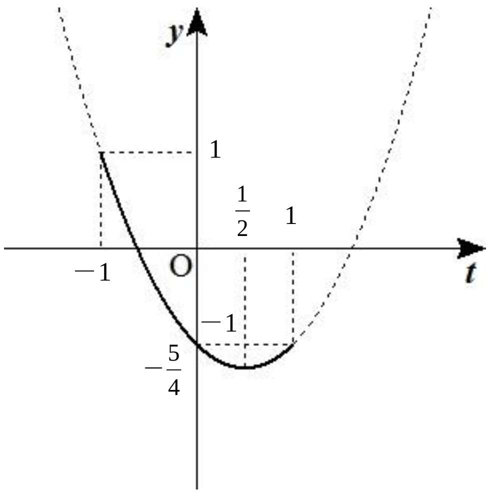
$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ より　$y=-\sin^2\theta-\cos\theta=-(1-\cos^2\theta)-\cos\theta=\cos^2\theta-\cos\theta-1$

$\cos\theta=t$ とおくと，$0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき $-1\leqq\cos\theta\leqq1$ であるから　$-1\leqq t\leqq1$

y を t を用いて表すと

$$y=t^2-t-1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$

$t=\dfrac{1}{2}$ で最小値 $-\dfrac{5}{4}$，$t=-1$ で最大値 1 をとる。



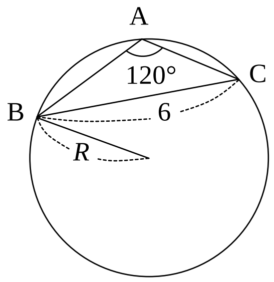
$t=\dfrac{1}{2}$　すなわち　$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ を満たす θ は　$\theta=60°$

$t=-1$　すなわち　$\cos\theta=-1$ を満たす θ は　$\theta=180°$

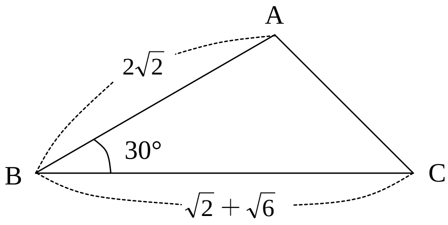
よって，**$\boldsymbol{\theta=60°}$ のとき最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{5}{4}}$，$\boldsymbol{\theta=180°}$ のとき最大値 1**

$\boxed{7}$ △ABC において，次のものを求めよ。

(1) ∠A＝120°，$a=6$ のときの外接円の半径 R



(2) $a=\sqrt{2}+\sqrt{6}$，∠B＝30°，$c=2\sqrt{2}$ のときの∠A，b，∠C



解答

(1) 正弦定理により，$\dfrac{6}{\sin 120^\circ}=2R$ から $\dfrac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$

よって $\boldsymbol{R}=\left(6\div\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{6}{\sqrt{3}}\boldsymbol{=2\sqrt{3}}$

(2) 余弦定理により

$$b^2=(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2+(2\sqrt{2})^2-2\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{6})\cdot 2\sqrt{2}\cdot\cos 30^\circ=2+2\sqrt{12}+6+8-4\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=16+4\sqrt{3}-4\sqrt{3}-12=4$$

$b>0$ から $b=2$

正弦定理により，$\dfrac{2}{\sin 30^\circ}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin C}$ から $\dfrac{2}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin C}$

よって $\sin C=2\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$2\sqrt{2}<\sqrt{2}+\sqrt{6}$ より，∠C＜∠A であるから ∠C＝45°，∠A＝180°－30°－45°＝105°

したがって **(∠A，$\boldsymbol{b}$，∠C)＝(105°，2，45°)**

8

$\cos A \sin C = \sin B$ が成り立つとき，△ABC はどのような形の三角形か。

解答

与えられた式に　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$　をそれぞれ代入すると

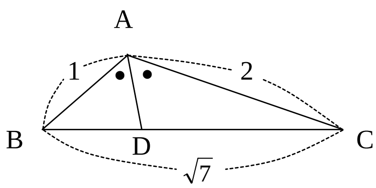
$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{c}{2R}=\frac{b}{2R}$$

両辺に $4bR$ を掛けると　$b^2+c^2-a^2=2b^2$　これから　$a^2+b^2=c^2$

よって，△ABC は**∠C＝90° の二等辺三角形**である。

9　次の空欄を埋めよ。

△ABC において，$a=\sqrt{7}$，$b=2$，$c=1$ のとき，$\cos A=$(ア)，
すなわち ∠A＝(イ)　よって，△ABC の面積は(ウ)
である。さらに，∠A の二等分線と BC の交点を D としたとき，
AD の長さは(エ)である。



解答

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{4+1-7}{2\cdot 2\cdot 1}=-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$　$0°\leqq ∠A\leqq 180°$ であるから　∠A＝**120°**

$△ABC=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot\sin 120°=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$

△ABD＋△ACD＝△ABC であるので，それぞれ面積の公式から

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot AD\cdot\sin 60°+\frac{1}{2}\cdot AD\cdot 2\cdot\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

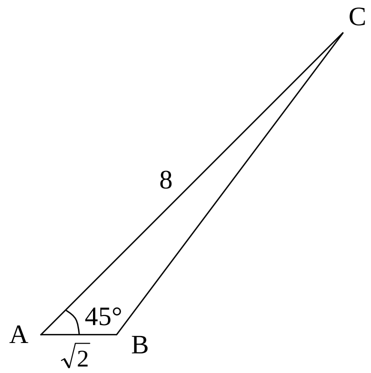
これから　$\dfrac{\sqrt{3}}{4}AD+\dfrac{\sqrt{3}}{2}AD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}AD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　よって　$AD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{4}{3\sqrt{3}}=\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$

（ア）　$-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$，（イ）　**120°**，（ウ）　$\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$，（エ）　$\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$

１０

△ABC において，∠A＝45°，$b=8$，$c=\sqrt{2}$ のとき，内接円の半径 r を求めよ。

解答



△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\angle A=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\sqrt{2}\cdot\sin 45^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=4$$

また　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle A=8^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot 8\cdot\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ$

$$=64+2-2\cdot 8\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=50$$

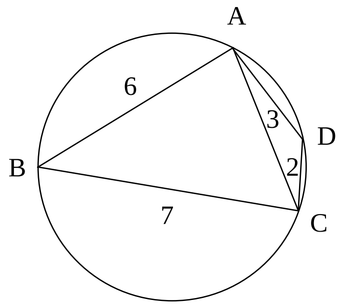
$a>0$ から　$a=5\sqrt{2}$　　$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ にそれぞれの値を代入すると　$4=\frac{1}{2}r(5\sqrt{2}+8+\sqrt{2})$

$4=(4+3\sqrt{2})r$ から　$\boldsymbol{r}=\frac{4}{4+3\sqrt{2}}=\frac{4(4-3\sqrt{2})}{(4+3\sqrt{2})(4-3\sqrt{2})}\boldsymbol{=6\sqrt{2}-8}$

研究１

円に内接する四角形 ABCD において，AB＝6，BC＝7，CD＝2，DA＝3 のとき，対角線 AC の長さ，四角形 ABCD の面積 S をそれぞれ求めよ。

解答



△ABC において，余弦定理により

$AC^2=6^2+7^2-2\cdot 6\cdot 7\cdot\cos\angle ABC$

$=85-84\cos\angle ABC$　……①

△ADC において，余弦定理により

$AC^2=2^2+3^2-2\cdot 2\cdot 3\cdot\cos\angle ADC$

$=13-12\cos(180^\circ-\angle ABC)$

$=13+12\cos\angle ABC$　……②

①，②から　$85-84\cos\angle ABC=13+12\cos\angle ABC$

これを解いて　$\cos\angle ABC=\frac{3}{4}$　　①に代入すると　$AC^2=85-84\cdot\frac{3}{4}=22$

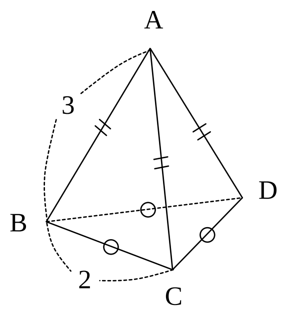
AC＞0 から　$\boldsymbol{AC=\sqrt{22}}$

また　$\sin\angle ABC=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$　　$\sin\angle ADC=\sin(180^\circ-\angle ABC)=\sin\angle ABC$ より

$$\boldsymbol{S}=\triangle ABC+\triangle ADC=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 7\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\boldsymbol{=6\sqrt{7}}$$

研究２

右の図のような，正三角錐 ABCD の体積を求めよ。



解答

頂点 A から底面△BCD に垂線 AH を引くと　△ABH≡△ACH≡△ADH

これから，BH＝CH＝DH であるので，点 H は△BCD の外心である。

よって，BH は△BCD の外接円の半径であるから

$$\frac{2}{\sin 60°}=2\mathrm{BH} \qquad \text{これから} \quad \mathrm{BH}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

△ABH は直角三角形であるから，三平方の定理により

$$\mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BH}^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{69}}{3}$$

また　$\triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot \sin 60°=\sqrt{3}$

以上から，正三角錐の体積は　$\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{BCD}\cdot\mathrm{AH}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{69}}{3}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{23}}{3}}$