

出題範囲：数と式，2次関数，場合の数，確率

3 次の問いに答えよ。(1)6点，(2)12点，計18点

- (1) Mさん：A，B，C，D，Eの5冊の本を，どの順番で読むか悩んでいるんだ。
Aさん：私は，BはEより先に読むと，Eがさらに面白くなると思うからおすすめ！
- A，B，C，D，Eを1列に並べるとき，B，Eがこの順に並ぶ並び方を求めよ。
- (2) (千の位)>(百の位)>(十の位)>(一の位)となる4桁の整数は何個あるか。
また，(千の位)<(百の位)<(十の位)<(一の位)となる4桁の整数は何個あるか。

解答

- (1) B，Eを○とし，A，C，D，○，○を1列に並べて，2つの○に左から順にB，Eと入れればよい。
よって $\frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 60$ (通り)
- (2) 0~9の10個の数から4個選んで，
(千の位)>(百の位)>(十の位)>(一の位)となるように並べれば，求める4桁の整数になる。
よって ${}_{10}C_4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$ (個)
また，千の位は0にならないことに注意して，1~9の9個の数から4個選んで，
(千の位)<(百の位)<(十の位)<(一の位)となるように並べれば，求める4桁の整数になる。
よって ${}_9C_4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$ (個)

4 1個のさいころを投げて出た目が大きい方が勝ちとなるゲームをする。ただし，最初に投げて出たさいころの目が気に入らなければ，1度だけ投げ直せるとする。

Aさん：1回目にどの目が出たとき投げ直せばよいか悩むね。
Mさん：僕なら，1回目3以下の目のとき投げ直すかな。

- 次の問いに答えよ。(1)8点，(2)，(3)各10点，計28点
- (1) Mさんの基準で投げ直すかどうか決めるとき，最終的に2の目が出る確率を求めよ。
また，最終的に5の目が出る確率を求めよ。
- (2) Mさんの基準で投げ直すかどうか決めるとき，最終的に出る目の期待値を求めよ。
- (3) 1回目4以下の目なら投げ直すとき，最終的に出る目の期待値を求めよ。

解答

- (1) 1回目に4~6の目が出ると投げ直さないことに注意すると，最終的に2の目が出るのは，1回目に1~3の目が出て，2回目に2の目が出るときである。

よって $\frac{3}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

また，最終的に5の目が出るのは，1回目に5の目が出るか，1回目に1~3の目が出て2回目に5の目が出るときであるから

$\frac{1}{6} + \frac{3}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{6+3}{36} = \frac{1}{4}$

- (2) (1)と同様に考えると

最終的に1の目が出る確率は $\frac{3}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

最終的に3の目が出る確率は $\frac{3}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

最終的に4の目が出る確率は $\frac{1}{6} + \frac{3}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$

最終的に6の目が出る確率は $\frac{1}{6} + \frac{3}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$

(1)の2，5の目が出る確率と合わせて，表にまとめると次のようになる。

| | | | | | | | |
|--------|----------------|----------------|----------------|---------------|---------------|---------------|---|
| さいころの目 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 計 |
| 確率 | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 |

よって，求める期待値は

$1 \times \frac{1}{12} + 2 \times \frac{1}{12} + 3 \times \frac{1}{12} + 4 \times \frac{1}{4} + 5 \times \frac{1}{4} + 6 \times \frac{1}{4}$
 $= \frac{1+2+3+12+15+18}{12} = \frac{51}{12} = \frac{17}{4}$

- (3) (1)と同様に考えると

最終的に1~4の目が出る確率は $\frac{4}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$

最終的に5，6の目が出る確率は $\frac{1}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{6+4}{36} = \frac{5}{18}$

これらを表にまとめると，次のようになる。

| | | | | | | | |
|--------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------|---|
| さいころの目 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 計 |
| 確率 | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{5}{18}$ | $\frac{5}{18}$ | 1 |

よって，求める期待値は

$1 \times \frac{1}{9} + 2 \times \frac{1}{9} + 3 \times \frac{1}{9} + 4 \times \frac{1}{9} + 5 \times \frac{5}{18} + 6 \times \frac{5}{18}$
 $= \frac{2+4+6+8+25+30}{18} = \frac{75}{18} = \frac{25}{6}$