

1 関数 $y = -(x^2 + 2x)^2 + 2(x^2 + 2x)$ について，次の問いに答えよ。

((1)7点，(2)13点，計20点)

- (1) $t = x^2 + 2x$ とするとき， t のとり得る値の範囲を求めよ。
- (2) y の最大値と，そのときの x の値を求めよ。

2 表，裏が等確率で出る硬貨が十分多く用意されているとする。 n 枚の硬貨を投げて表がちょうど2枚出るときの確率を p_n とするとき，次の問いに答えよ。ただし， n は2以上の自然数とする。

((1)7点，(2)13点，計20点)

- (1) $\frac{p_{n+1}}{p_n} < 1$ となる n の最小値を求めよ。
- (2) 表がちょうど2枚出る確率が最大となる n と，そのときの確率を求めよ。

3 自然数 x, y, z が $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{4}$ ， $x > y > z$ を満たすとき， $x + y + z$ が最小となる x, y, z を求めよ。

(20点)

Mさん：何かからすればよいのやら...

Aさん：取っ掛かりがないね。とりあえず， x, y, z に適当な数を代入してみようか。

Mさん： $x > y > z$ だから， $(x, y, z) = (3, 2, 1)$ を代入すると

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = \frac{2+3+6}{6} = \frac{11}{6}$$

これだと $\frac{3}{4}$ を超えるから， $(x, y, z) = (6, 5, 4)$

$$\text{を代入すると } \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{10+12+15}{60} = \frac{37}{60}$$

これだと $\frac{3}{4}$ より小さくなる。

Aさん： $x > y > z$ のとき $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} < \frac{1}{z}$ だから，

$\frac{1}{z}$ が大きすぎても小さすぎてもダメな気がする。

Mさん：まずは $\frac{1}{z}$ の範囲を考えてみましょうか！

4 関数 $y = 3^{2x} + 3^{-2x} - 4(3^x + 3^{-x})$ について， $3^x + 3^{-x} = t$ とおくととき， y を t を用いて表せ。また， y の最小値とそのときの x の値を求めよ。

(20点)

5 原点 $O(0, 0, 0)$ ，

定点 $A(1, 0, 2)$ ，

動点 $P(2t, t+1, -t+3)$ がある。

$\angle AOP$ の大きさが最小となるときの実数 t の値を求めよ。

(20点)

