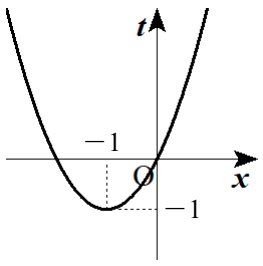
1 関数 $y=-(x^2+2x)^2+2(x^2+2x)$について，次の問いに答えよ。
（(1)7 点，(2)13 点，計 20 点）

(1) $t=x^2+2x$ とするとき，t のとり得る値の範囲を求めよ。

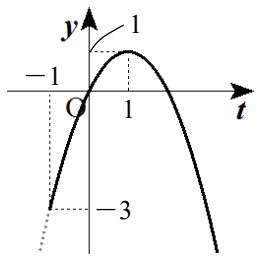
(2) y の最大値と，そのときの x の値を求めよ。

解答

(1) $t=x^2+2x=(x^2+2x+1)-1$
$=(x+1)^2-1$
右のグラフより，t のとり得る値の範囲は
$\boldsymbol{t\geqq -1}$



(2) $y=-(x^2+2x)^2+2(x^2+2x)$を，
(1)の t の式で表すと
$y=-t^2+2t$
$=-(t^2-2t+1)+1$
$=-(t-1)^2+1$
(1)より，$t\geqq -1$ であるから
y は $t=1$ で最大値 1 をとる。
$t=1$ のとき　$1=x^2+2x$
$x^2+2x-1=0$



$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot1\cdot(-1)}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2}=-1\pm\sqrt{2}$$

以上から，　$\boldsymbol{x=-1\pm\sqrt{2}}$**のとき 最大値1**

2 表，裏が等確率で出る硬貨が十分多く用意されているとする。n 枚の硬貨を投げて表がちょうど 2 枚出るときの確率を p_n とするとき，次の問いに答えよ。ただし，n は 2 以上の自然数とする。　（(1)7 点，(2)13 点，計 20 点）

(1) $\dfrac{p_{n+1}}{p_n}<1$ となるnの最小値を求めよ。

(2) 表がちょうど 2 枚出る確率が最大となる n と，そのときの確率を求めよ。

解答

(1) $p_2={}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,

$p_3={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$,

$p_4={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{8}$,

$p_5={}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{5}{16}$,

⋮

$p_n={}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=\frac{n(n-1)}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{n(n-1)}{2^{n+1}}$,

$p_{n+1}={}_{n+1}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)-2}=\frac{(n+1)n}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$=\frac{n(n+1)}{2^{n+2}}$

よって　$\dfrac{p_{n+1}}{p_n}=\dfrac{\frac{n(n+1)}{2^{n+2}}}{\frac{n(n-1)}{2^{n+1}}}=\dfrac{n+1}{2(n-1)}$

これより　$\dfrac{n+1}{2(n-1)}<1$　　$n-1>0$ であるから

$n+1<2(n-1)$　　$n>3$

したがって，自然数 n の最小値は　**4**

(2)　(1)の解答より　$p_3=p_4=\dfrac{3}{8}$

であり，(1)より，$n>3$ のとき $\dfrac{p_{n+1}}{p_n}<1$ であるから

$p_1<p_2<p_3=p_4>p_5>p_6>\cdots\cdots$

したがって，$\boldsymbol{n=3,\ 4}$ のとき確率は最大となり，

そのときの確率は　$\boldsymbol{\dfrac{3}{8}}$

3 自然数x，y，zが$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{4}$，$x>y>z$を満たすとき，$x+y+z$ が最小となる x, y, z を求めよ。（20 点）

M さん：何からすればよいのやら…
A さん：取っ掛かりがないね。。とりあえず，x，y，z に適当な数を代入してみようか。
M さん：$x>y>z$ だから，$(x,\ y,\ z)=(3,\ 2,\ 1)$を代入すると

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}=\frac{2+3+6}{6}=\frac{11}{6}$$

これだと$\frac{3}{4}$を超えるから，$(x,\ y,\ z)=(6,\ 5,\ 4)$

を代入すると　$\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}=\frac{10+12+15}{60}=\frac{37}{60}$

これだと$\frac{3}{4}$より小さくなる。。

A さん：$x>y>z$のとき$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}<\frac{1}{z}$だから，

$\frac{1}{z}$が大きすぎても小さすぎてもダメな気がする。

M さん：まずは$\frac{1}{z}$の範囲を考えてみましょうか！

解答

x，y，zは自然数であり，$x>y>z$であるから　$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}<\frac{1}{z}$

よって　$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{z}=\frac{3}{z}$

これより，$\frac{3}{4}<\frac{3}{z}$から　$z<4$

また，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>\frac{1}{z}$であるから　$\frac{3}{4}>\frac{1}{z}$　　よって　$z>\frac{4}{3}$

以上から　$\frac{4}{3}<z<4$　　zは自然数であるから　$z=2,\ 3$

(ⅰ)　z=2 のとき

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$より　$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$

$x>y$であることから　$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<\frac{2}{y}$より　$\frac{1}{4}<\frac{2}{y}$

よって　$y<8$

また，$\frac{1}{4}>\frac{1}{y}$より　$y>4$

したがって，4<y<8 より　y=5，6，7

(ⅰ)－①　$y=5$ のとき，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{5}=\frac{1}{4}$より　$\frac{1}{x}=\frac{1}{20}$

よって　$x=20$

(ⅰ)－②　$y=6$ のとき，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$より　$\frac{1}{x}=\frac{1}{12}$

よって　$x=12$

(ⅰ)－③　$y=7$ のとき　$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{7}=\frac{1}{4}$より　$\frac{1}{x}=\frac{3}{28}$

このとき$x=\frac{28}{3}$となるが，xは自然数より不適。

(ⅱ)　z=3 のとき

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{3}=\frac{3}{4}$より　$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{12}$

$x>y$であることから　$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}<\frac{2}{y}$より　$\frac{5}{12}<\frac{2}{y}$

よって　$y<\frac{24}{5}$

また，$\frac{5}{12}>\frac{1}{y}$より　$y>\frac{12}{5}$

したがって，$\frac{12}{5}<y<\frac{24}{5}$より　$y=3,\ 4$

ここで$y>z$ であるから，y=3 は不適。

(ⅱ)－①　$y=4$ のとき，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$より

$\frac{1}{x}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$　　よって　$x=6$

(ⅰ)，(ⅱ)から，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{4}$，$x>y>z$を満たす自然数 x，y，z は

$(x,\ y,\ z)$=(20，5，2)，(12，6，2)，(6，4，3)

以上より，$x+y+z$ が最小となる x，y，z は

$(x,\ y,\ z)$=(6，4，3)

出題範囲：2 次関数，確率，式と証明（整数問題），指数関数・対数関数，ベクトル

4 関数 $y=3^{2x}+3^{-2x}-4(3^x+3^{-x})$について，$3^x+3^{-x}=t$ とおくとき，y を t を用いて表せ。また，y の最小値とそのときの x の値を求めよ。（20 点）

解答

$3^x+3^{-x}=t$ であるから

$$t^2=(3^x+3^{-x})^2=3^{2x}+2+3^{-2x}$$

よって　$3^{2x}+3^{-2x}=t^2-2$

したがって　$y=3^{2x}+3^{-2x}-4(3^x+3^{-x})$

$$=t^2-2-4t$$

$$\boldsymbol{=t^2-4t-2}$$

相加平均と相乗平均の大小関係により，

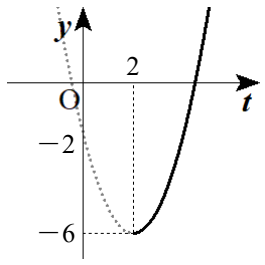
$t=3^x+3^{-x}\geqq 2\sqrt{3^x\cdot 3^{-x}}=2$ であるから

$t\geqq 2$ における $y=t^2-4t-2$ の最小値は

$$y=t^2-4t-2$$
$$=(t-2)^2-4-2$$
$$=(t-2)^2-6$$

これから，$t=2$ のとき

最小値-6 をとる。



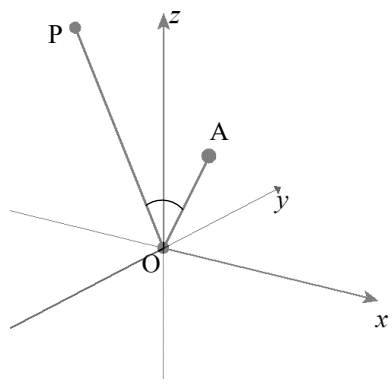
$t=2$ となるのは　$3^x=3^{-x}$

すなわち，$x=0$ のときであるから

$x=0$ のとき最小値-6

> $t=2$ となるのは 3^x と 3^{-x} の相加平均と相乗平均の大小関係における，等号が成立するときである。

5 原点 O(0，0，0)，
定点 A(1，0，2)，
動点 P(2t，t＋1，$-t$＋3)
がある。
∠AOP の大きさが最小となるときの実数 t の値を求めよ。（20 点）



解答

$\overrightarrow{OA}=(1,\ 0,\ 2)$，$\overrightarrow{OP}=(2t,\ t+1,\ -t+3)$であり，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OP}|\cos\angle AOP$$

が成り立つ。

ここで　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=1\cdot 2t+0\cdot(t+1)+2(-t+3)$

$$=2t-2t+6=6$$

$$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{1^2+0^2+2^2}=\sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{(2t)^2+(t+1)^2+(-t+3)^2}$$

$$=\sqrt{4t^2+t^2+2t+1+t^2-6t+9}$$

$$=\sqrt{6t^2-4t+10}$$

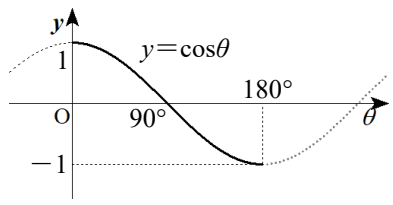
$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3t^2-2t+5}$$

よって，$6=\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3t^2-2t+5}\cos\angle AOP$ より

$$\cos\angle AOP=\frac{6}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{3t^2-2t+5}}$$

ここで，$0°\leqq\angle AOP\leqq 180°$

であるから，$\cos\angle AOP$ が最大となるとき，∠AOP の大きさは最小となる。



θ が小さいほど $\cos\theta$ の値は大きくなる。

$$3t^2-2t+5$$

$$=3\left(t^2-\frac{2}{3}t\right)+5$$

$$=3\left\{\left(t-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right\}+5$$

$$=3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}+5$$

$$=3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{14}{3}$$

であるから，$3t^2-2t+5>0$ である。

したがって，$\cos\angle AOP$ が最大となるのは，$3t^2-2t+5$ が最小となるときであり，

$$3t^2-2t+5=3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{14}{3}$$

であるから，$3t^2-2t+5$ は$t=\frac{1}{3}$のとき最小となる。

以上より，∠AOP の大きさが最小となる実数 t の値は

$$\boldsymbol{t=\frac{1}{3}}$$