$\boxed{1}$

(1)　$(x+3y)^5$ の展開式における x^3y^2 の係数を求めよ。

(2)　$t>0$ のとき，不等式 $t+\dfrac{1}{t}\geqq 2$ を証明せよ。また，等式が成り立つのはどのようなときか。

解答

(1)　$(x+3y)^5$ の展開式の一般項は　${}_5\mathrm{C}_r x^{5-r}(3y)^r={}_5\mathrm{C}_r\cdot 3^r x^{5-r}y^r$

$x^{5-r}y^r$ が x^3y^2 となるのは　$r=2$　　よって，求める係数は　${}_5\mathrm{C}_2\cdot 3^2=10\cdot 9=\mathbf{90}$

(2)　$t>0$，$\dfrac{1}{t}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$t+\frac{1}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}=2\cdot 1=2$$

よって　$t+\dfrac{1}{t}\geqq 2$

等号が成り立つのは　$t=\dfrac{1}{t}$

すなわち，$t^2=1$ のときであるが，$t>0$ より，$t=1$ のときである。

解　説

$(a+b)^n$ の展開式（二項定理）

$$\boldsymbol{(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n}$$

$(a+b)^n$ の展開式の各項は $\boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r}$ と表すことができる。

$(a+b+c)^n$ の展開式（多項定理）

$(a+b+c)^n$の展開式における$a^pb^qc^r$の係数は　$\dfrac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{p}!\ \boldsymbol{q}!\ \boldsymbol{r}!}$　　ただし　$p+q+r=n$

二項定理は，展開式のある項の係数を求める際に利用するほか,

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n$$

に, 例えば $a=1$, $b=1$ を代入して, $2^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n$ が成り立つことの証明などにも利用される。

相加平均と相乗平均の大小関係

$a>0$，$b>0$ のとき　$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$　　等号が成り立つのは，$a=b$ のときである。

相加平均と相乗平均の大小関係は　$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$　の形でよく用いられる。この関係を利用するときは，$a>0$，$b>0$ であることを必ず確認する。また，この大小関係が成り立つもととなっている

$$(\text{左辺})-(\text{右辺})=(a+b)-2\sqrt{ab}=\left(\sqrt{a}\right)^2-2\sqrt{ab}+\left(\sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\geqq 0$$

という式変形も押さえておきたい。

$\boxed{2}$

(1)　2 次方程式$x^2+3x+6=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$ の値を求めよ。

(2)　方程式 $x^3+2x^2-3x-4=0$ を解け。

解答

(1)　2 次方程式の解と係数の関係により　$\alpha+\beta=-\dfrac{3}{1}=-3$，　$\alpha\beta=\dfrac{6}{1}=6$

よって　$\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{(-3)^2-2\cdot 6}{6}=\dfrac{9-12}{6}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$

(2)　$P(x)=x^3+2x^2-3x-4$ とおくと　$(-1)^3+2\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)-4=-1+2+3-4=0$ より　$P(-1)=0$

右の組立除法により

$P(x)=(x+1)(x^2+x-4)$

$P(x)=0$ から　$x+1=0$　または　$x^2+x-4=0$

解の公式により

-1	1	2	-3	-4
		-1	-1	4
	1	1	-4	0

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+16}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$$

したがって　$\boldsymbol{x=-1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}}$

解　説

2 次方程式の解と係数の関係

2 次方程式$ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解をα，βとすると　　$\boldsymbol{\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}}$，　$\boldsymbol{\alpha\beta=\dfrac{c}{a}}$

符号に自信がない場合は，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解が α，β のとき

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$と因数分解できることから　$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，　$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$　を導くとよい。

式の値を求める際，対称式の代表的な変形　$\boldsymbol{\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}$,　　$\boldsymbol{\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}$

は押さえておきたい。

因数定理

・1 次式 $x-\alpha$ が多項式 $P(x)$の因数である　　$\Leftrightarrow$　　$P(\alpha)=0$

・1 次式$ax+b$が多項式$P(x)$の因数である　$\Leftrightarrow$　$P\left(-\dfrac{b}{a}\right)=0$

与えられた方程式を $P(x)=0$ の形に変形し，定数項の約数に着目して $\mathrm{P}(\alpha)=0$ を満たす α を見つけ出す。

このとき，因数定理により多項式 $P(x)$は $x-\alpha$ を因数にもつので，$P(x)=(x-\alpha)\cdot Q(x)$と表すことができる。

整式の割り算では筆算を用いてもよいが，組立除法を使えるようにしておくと計算ミスが減り，

計算時間も短縮できる。

3

(1)　r を正の実数とする。円 $x^2+y^2=r^2$ と直線 $2x-y-5=0$ が接するとき，円の半径 r の値を求めよ。

(2)　原点 O，点 A(6，3)からの距離の比が 2：1 である点 P の軌跡を求めよ。

解答

(1)　円$x^2+y^2=r^2$の中心$(0,\ 0)$と，直線 $2x-y-5=0$ の距離dは　$d=\dfrac{|-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

円の半径と d が一致するとき，円と直線は接する。よって，$r=d$ となればよい。

したがって　$\boldsymbol{r=\sqrt{5}}$

別解　$x^2+y^2=r^2$ に $y=2x-5$ を代入すると　$x^2+(2x-5)^2=r^2$　　$5x^2-20x+25-r^2=0$

この 2 次方程式が重解をもつとき，円と直線は接する。2 次方程式の判別式を D とすると

$$D=(-20)^2-4\cdot5\cdot(25-r^2)=400-500+20r^2=20(r^2-5)$$

$D=0$ となるのは，$r^2-5=0$ のときであるから，求めるrの値は，$r>0$ より　$r=\sqrt{5}$

(2)　条件を満たす点を P(x，y)とすると

OP：AP＝2：1 から　OP＝2AP

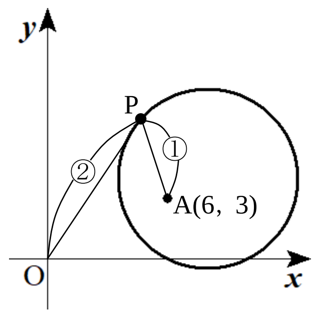
よって　$\mathrm{OP}^2=4\mathrm{AP}^2$

したがって　$x^2+y^2=4\{(x-6)^2+(y-3)^2\}$

整理すると，$3x^2-48x+3y^2-24y+180=0$ から

$$(x-8)^2+(y-4)^2=20$$

以上から，求める点 P の軌跡は，**点(8，4)を中心とし，半径が $2\sqrt{5}$ の円**である。

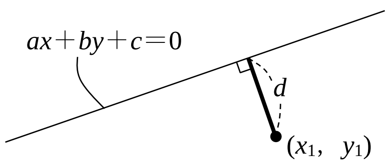


解　説

点と直線の距離

直線 $ax+by+c=0$ と点(x_1，y_1)の距離 d は

$$\boldsymbol{d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$



軌跡を求める手順

1　条件を満たす点 P の座標を(x，y)とおき，条件から x，y の関係式を求めて，その方程式が表す図形 F 上に点 P があることを示す。

2　図形 F 上の任意の点が，条件を満たしていることを示す。

（注意）　1の証明から2が明らかな場合，2の証明を省略してもよい。

ここでは，点と直線の距離と軌跡を扱ったが，内分点・外分点や直線の方程式，不等式の表す領域など，ほかにも押さえるべきポイントは多い。「図形と方程式」は基本を完ぺきにしてから過去問に取り組もうとすると準備期間が長くなるので，過去問演習を通して公式をマスターするという考え方も有効である。

4

(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，関数 $y = \cos\theta - \sin^2\theta$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

(2)　次の値を求めよ。

①　$\sin 75°$　　②　$\cos 105°$　　③　$\tan \frac{11}{12}\pi$

(3)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解き。

①　$\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 1$　　②　$\sin 2\theta - \cos 2\theta > 1$

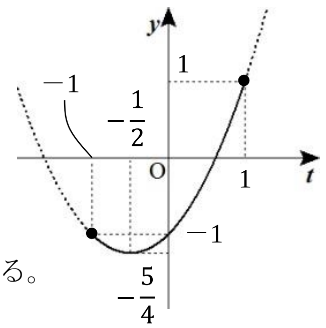
解答

(1)　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から　$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

よって，与えられた関数は　$y = \cos\theta - (1 - \cos^2\theta) = \cos^2\theta + \cos\theta - 1$

と変形できる。ここで，$\cos\theta = t$ とおくと　$-1 \leqq t \leqq 1$

与えられた関数は　$y = t^2 + t - 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$

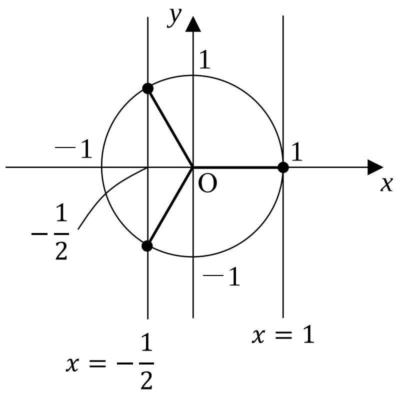


したがって，y は　$t = -\frac{1}{2}$ のとき最小値 $-\frac{5}{4}$，$t = 1$ のとき最大値 1 をとる。

ここで，$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$t = -\frac{1}{2}$ となるのは，$\cos\theta = -\frac{1}{2}$ から　$\theta = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,$

$t = 1$ となるのは，$\cos\theta = 1$ から　$\theta = 0$



以上から　$\boldsymbol{\theta = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{-\frac{5}{4}}$**，**

$\boldsymbol{\theta = 0}$ **のとき最大値 1**

(2)　①　$\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

別解　$75° = 120° - 45°$ と考えてもよい。

$\sin 75° = \sin(120° - 45°) = \sin 120° \cos 45° - \cos 120° \sin 45°$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

②　$\cos 105° = \cos(60° + 45°) = \cos 60° \cos 45° - \sin 60° \sin 45°$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

別解　$105° = 135° - 30°$ と考えてもよい。

$\cos 105° = \cos(135° - 30°) = \cos 135° \cos 30° + \sin 135° \sin 30°$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

③　$\dfrac{11}{12}\pi=\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{\pi}{4}$ であるから

$$\tan\frac{11}{12}\pi=\tan\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{2}{3}\pi+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{2}{3}\pi\cdot\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{-\sqrt{3}+1}{1-(-\sqrt{3})\cdot 1}=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}=\frac{1-2\sqrt{3}+3}{1-3}=\frac{4-2\sqrt{3}}{-2}=\boldsymbol{-2+\sqrt{3}}$$

弧度法の $\dfrac{11}{12}\pi$ を，度数法に直すと

$$\frac{11}{12}\times 180^\circ=165^\circ$$

$165^\circ=120^\circ+45^\circ$ と考えることができる。

別解　$\dfrac{11}{12}\pi=\dfrac{3}{4}\pi+\dfrac{\pi}{6}$ と考えてもよい。

$$\tan\frac{11}{12}\pi=\tan\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\tan\frac{3}{4}\pi+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{3}{4}\pi\cdot\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{-1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-(-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=-2+\sqrt{3}$$

(3)　①　右の図から

$$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

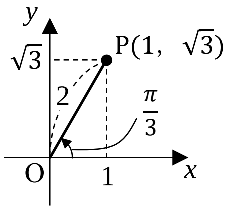
よって，与えられた式を変形すると

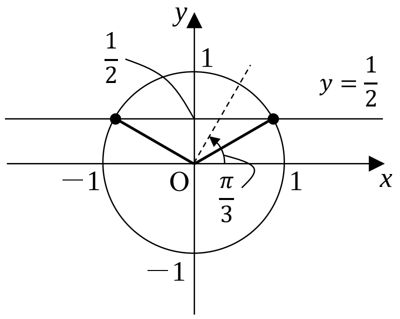
$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7}{3}\pi$ であるから

$$\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi,\quad \frac{13}{6}\pi$$

したがって　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{11}{6}\pi}$





②　右の図から

$$\sin 2\theta-\cos 2\theta=\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

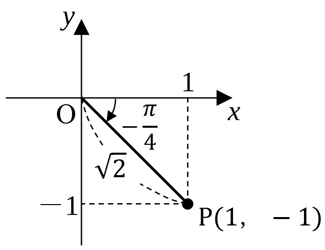
よって，与えられた式を変形すると

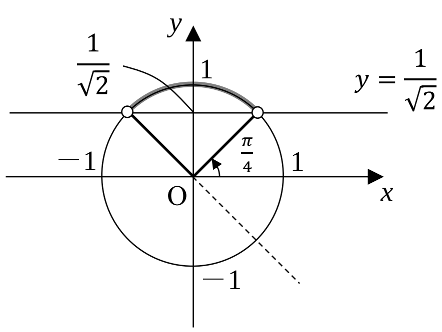
$$\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)>\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$-\dfrac{\pi}{4}\leqq 2\theta-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{15}{4}\pi$ であるから

$$\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

を解くと　$2\theta-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{9}{4}\pi,\ \dfrac{11}{4}\pi$





これから　$\dfrac{\pi}{4}<2\theta-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{9}{4}\pi<2\theta-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{11}{4}\pi$　　したがって　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{4}\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi}$

解　説

正弦，余弦の加法定理

$\boxed{1}$　$\mathbf{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$

　$\mathbf{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$

$\boxed{2}$　$\mathbf{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$

　$\mathbf{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$

〈注意〉覚えるのが大変な公式なので，次のような語呂合わせが考案されている。

$\sin(\alpha+\beta)=$　$\sin\alpha$　$\cos\beta$　＋　$\cos\alpha$　$\sin\beta$

咲いたコスモス　コスモス咲いた

$\cos(\alpha+\beta)=$　$\cos\alpha$　$\cos\beta$　－　$\sin\alpha$　$\sin\beta$

コスモスコスモス　咲かない咲かない

※左辺や右辺の符号には十分注意する。

（別バージョン）　$\sin(\alpha+\beta)$　　$=\sin\alpha\cos\beta+$　$\cos\alpha$　$\sin\beta$

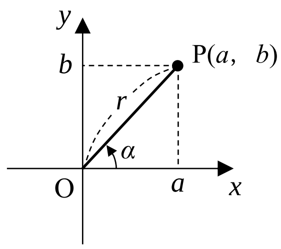
サンタ（サイン，足す）は 最　高，　こっそり侵入

正接の加法定理

$\boxed{3}$　$\displaystyle \mathbf{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}}$

$$\mathbf{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}}$$

三角関数の加法定理を利用して，$a\sin\theta+b\cos\theta$ を $r\sin(\theta+\alpha)$の形に変形することができる。
この変形を，**三角関数の合成** という。



$a\sin\theta+b\cos\theta$ に対して，座標が$(a,\ b)$である点 P をとり，
$\mathrm{OP}=r$ とする。
また，線分 OP と x 軸の正の部分のなす角を α とすると

$$r=\sqrt{a^2+b^2},\ \ a=r\cos\alpha,\ \ b=r\sin\alpha$$

であるから，三角関数の加法定理を利用すると

$$a\sin\theta+b\cos\theta=r\cos\alpha\sin\theta+r\sin\alpha\cos\theta=r(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)=r\sin(\theta+\alpha)$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

以上から　$\boldsymbol{a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)}$

ただし　$\displaystyle \boldsymbol{\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \ \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

ここで扱った置き換えや加法定理は入試の基本事項ではあるが，単純に公式を用いるだけの問題はほぼ出題されない。多くの過去問を解き，入試問題に慣れるようにしたい。

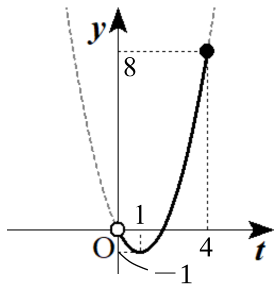
$\boxed{5}$

(1)　関数 $y=4^x-2^{x+1}$ $(x\leqq 2)$ の最大値と最小値を求めよ。

(2)　方程式 $\log_3 x+\log_9(x-2)=1$ を解け。

(3)　5^{55} は何桁の整数か。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

解答



(1)　$2^x=t$ とおくと　$t>0$　　また，$x\leqq 2$ であるから　$0<t\leqq 4$

このとき関数は　$y=4^x-2^{x+1}=(2^2)^x-2^x\cdot 2^1=(2^x)^2-2\cdot 2^x=t^2-2t=(t-1)^2-1$

$0<t\leqq 4$ であるから，右のグラフより，$t=4$ のとき最大値 8 をとり，$t=1$ のとき最小値 -1 をとる。

$t=4$ のとき　$2^x=4$　　よって　$x=2$，　$t=1$ のとき　$2^x=1$　　よって　$x=0$

したがって，この関数は　**$x=2$ のとき最大値 8** をとり，**$x=0$ のとき最小値 -1** をとる。

(2)　真数は正であるから　$x>0$ かつ $x-2>0$　　すなわち　$x>2$　……(ｉ)

方程式を変形すると　$\log_3 x+\dfrac{\log_3(x-2)}{\log_3 9}=1$

3	1	−2	0	−9
		3	3	9
	1	1	3	0

両辺 2 倍すると　$2\log_3 x+\log_3(x-2)=2$　　　$\log_3 x^2(x-2)=\log_3 9$

よって　$x^2(x-2)=9$　　整理すると　$x^3-2x^2-9=0$　　$(x-3)(x^2+x+3)=0$　　(ｉ)から　$\boldsymbol{x=3}$

(3)　5^{55} の常用対数の値を求める。

$$\log_{10}5^{55}=55\log_{10}5=55\log_{10}\frac{10}{2}=55(\log_{10}10-\log_{10}2)=55(1-0.3010)=38.445$$

よって　$5^{55}=10^{38.445}$　　$10^{38}<10^{38.445}<10^{39}$ であるから　　$10^{38}<5^{55}<10^{39}$

したがって，5^{55} は **39 桁**の整数である。

解　説

(1)　$2^x=t$ とおくと，y は t の 2 次式になる。t の範囲に注意して最大値，最小値を求める。

ここでは扱っていないが，$2^x+2^{-x}=t$ とするような置き換え問題もある。このとき，相加平均と相乗平均の大小関係により，$2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$ から，t の範囲は $t\geqq 2$ となることに注意する。

(2)　対数を含む方程式・不等式では，真数条件を忘れずチェックする。

自然数の桁数

例えば，$100\leqq N<1000$ なら N は 3 桁の整数である。一般に次の関係がある。

N が k 桁の自然数 $\Leftrightarrow$ $10^{k-1}\leqq N<10^k$ $\Leftrightarrow$ $k-1\leqq\log_{10}N<k$

小数首位

N は小数第 k 位に初めて 0 でない数字が現れる $\Leftrightarrow$ $10^{-k}\leqq N<10^{-k+1}$ $\Leftrightarrow$ $-k\leqq\log_{10}N<-k+1$

「指数関数・対数関数」では，定義域・値域に注意をはらったり，真数条件に注意するなどこの分野特有の注意事項があるので，過去問演習でも意識しておきたい。

6

(1)　曲線 $y=x^3-2x^2-3x+4$ 上の点(2，−2)における接線の方程式を求めよ。

(2)　関数 $y=-x^3-x^2+x$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ の最大値と最小値を求めよ。

(3)　曲線 $y=x^3-x$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解答

(1)　$f(x)=x^3-2x^2-3x+4$ とすると　$f'(x)=3x^2-4x-3$

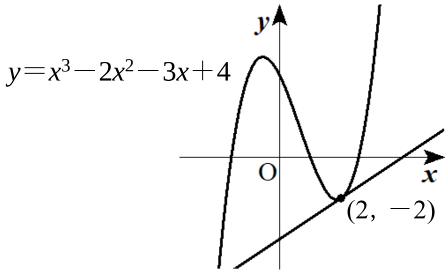
点(2，−2)における接線の傾きは

$f'(2)=3\cdot 2^2-4\cdot 2-3=1$

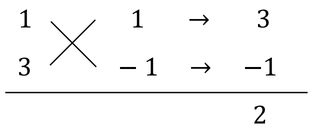
よって，求める接線の方程式は

$y-(-2)=1\cdot(x-2)$

すなわち　$\boldsymbol{y=x-4}$



(2)　$y'=-3x^2-2x+1=-(3x^2+2x-1)=-(x+1)(3x-1)$



$y'=0$ とすると　$x=-1,\ \dfrac{1}{3}$

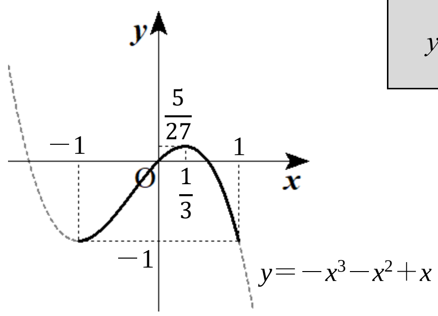
y の増減表は右のようになる。

x	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
y'	0	$+$	0	$-$	
y	-1	↗	$\frac{5}{27}$	↘	-1

よって，**$x=1$，-1 で最小値 -1**

$x=\dfrac{1}{3}$　　で最大値 $\dfrac{5}{27}$

をとる。

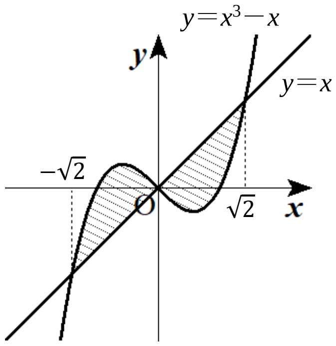


(3)　$x^3-x=x$ を解くと　$x(x^2-2)=0$ から　$x=0,\ \pm\sqrt{2}$

区間 $-\sqrt{2}\leqq x\leqq 0$ において $x^3-x\geqq x$,

区間 $0\leqq x\leqq -\sqrt{2}$ において $x\geqq x^3-x$ であるから，

求める面積 S は



$$S=\int_{-\sqrt{2}}^{0}\{(x^3-x)-x\}\,dx+\int_{0}^{\sqrt{2}}\{x-(x^3-x)\}\,dx$$

$$=\int_{-\sqrt{2}}^{0}(x^3-2x)\,dx+\int_{0}^{\sqrt{2}}(2x-x^3)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^2\right]_{-\sqrt{2}}^{0}+\left[x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{\sqrt{2}}=-\left(\frac{1}{4}\cdot 4-2\right)+\left(2-\frac{1}{4}\cdot 4\right)=\mathbf{2}$$

要　点

接線の方程式

曲線 $y=f(x)$上の点$(a,\ f(a))$における接線の方程式は

$$\boldsymbol{y-f(a)=f'(a)(x-a)}$$

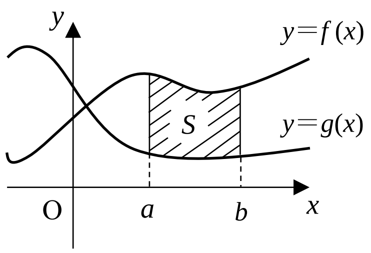
曲線 $y=f(x)$上にない点$(s,\ t)$からその曲線に引いた接線の方程式を求めるときは，接点の座標を曲線上の点$(a,\ f(a))$と仮において，その点$(a,\ f(a))$における接線が点$(s,\ t)$を通ると考えて，a の値を求める。

(2)　増減表を作り，極値および端点に着目して最大値，最小値を求める。
　極大値，極小値が，必ずしも最大値，最小値ではないことに注意する。

2 つの曲線の間の面積

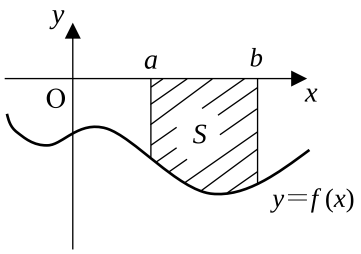
区間 $a \leqq x \leqq b$ で，$f(x) \geqq g(x)$のとき，
2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$，および
2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形の
面積 S は

$$\boldsymbol{S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx}$$



特に，区間 $a \leqq x \leqq b$ で，$f(x) \leqq 0$ の
とき，曲線 $y=f(x)$と x 軸，および
2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形
の面積 S は

$$\boldsymbol{S=-\int_a^b f(x)\,dx}$$



「微分と積分」は出題率が高く，計算ミスに気を付ければ正解できる問題が多いので，
重点的に対策したい。

7

(1)　次の数列の一般項を求めよ。また，第 8 項を求めよ。

①　等差数列 1，4，7，10，……

②　等比数列 $\frac{3}{8}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{3}{2}$，3，……

(2)　階差数列 2，3，7，16，32，57，…… の一般項を求めよ。

(3)　数列 $1\cdot1$，$2\cdot3$，$3\cdot3^2$，$4\cdot3^3$，…… の初項から第 n 項までの和を求めよ。

解答

(1)　①　初項が 1，公差が 3 の等差数列であるから

$$\boldsymbol{a_n} = 1 + (n-1)\cdot3 = \boldsymbol{3n-2}, \qquad \boldsymbol{S_n} = \frac{1}{2}n\{2\cdot1 + (n-1)\cdot3\} = \boldsymbol{\frac{1}{2}n(3n-1)}$$

②　初項が $\frac{3}{8}$，公比が 2 の等比数列であるから

$$\boldsymbol{a_n} = \frac{3}{8}\cdot2^{n-1} = \boldsymbol{3\cdot2^{n-4}}, \qquad \boldsymbol{S_n} = \frac{\frac{3}{8}\cdot(1-2^n)}{1-2} = \boldsymbol{\frac{3}{8}(2^n-1)}$$

(2)　求める数列$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$とする。

数列$\{b_n\}$は，1，4，9，16，25，…… であるから　$b_n=n^2$　　したがって，$n\geqq2$ のとき

$$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}k^2 = 2 + \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) = 2 + \frac{1}{6}n(2n^2-3n+1) = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n + 2$$

また，$n=1$ のとき，$a_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + 2 = 2$ より，数列$\{a_n\}$の初項と一致する。

以上から　$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n + 2}$

(3)　$1\cdot1$，$2\cdot3$，$3\cdot3^2$，$4\cdot3^3$，…… は，初項 1，公差 1 の等差数列と初項 1，公比 3 の等比数列の積の数列であるから，一般項 a_n は　　$a_n=\{1+(n-1)\cdot1\}\cdot1\cdot3^{n-1}=n\cdot3^{n-1}$

求める和を S とすると

$$\begin{aligned} S &= 1\cdot1+2\cdot3+3\cdot3^2+\cdots\cdots+n\cdot3^{n-1} \\ -)\quad 3S &= \qquad 1\cdot3+2\cdot3^2+\cdots\cdots+(n-1)\cdot3^{n-1}+n\cdot3^n \\ S-3S &= 1\cdot1+1\cdot3+1\cdot3^2+\cdots\cdots+1\cdot3^{n-1}-n\cdot3^n \end{aligned}$$

$$-2S = 1(1+3+3^2+\cdots\cdots+3^{n-1}) - n\cdot3^n = 1\cdot\frac{3^n-1}{3-1} - n\cdot3^n = \frac{1}{2}\cdot3^n - \frac{1}{2} - n\cdot3^n$$

よって　$S = -\frac{1}{4}\cdot3^n + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}n\cdot3^n = \boldsymbol{\frac{1}{4}(2n-1)\cdot3^n + \frac{1}{4}}$

解　説

等差数列

等差数列$\{a_n\}$の初項を a，公差を d，末項を l，一般項を a_n，初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$\boldsymbol{a_n = a + (n-1)d}$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{1}{2}n(a+l) = \frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}}$$

等比数列

等比数列$\{a_n\}$の初項を a，公比を r，一般項を a_n，初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$\boldsymbol{a_n = ar^{n-1}}$$

$$\boldsymbol{r \neq 1}\textbf{のとき}\quad \boldsymbol{S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}},\qquad \boldsymbol{r = 1}\textbf{のとき}\quad \boldsymbol{S_n = na}$$

数列$\{a_n\}$の隣り合う 2 つの項の差 $b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を項とする数列$\{b_n\}$を，数列$\{a_n\}$の**階差数列**という。

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
\{a_n\} & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & \cdots\cdots & a_n & & a_{n+1} \\
& & \diagdown\ \diagup & & \diagdown\ \diagup & & \diagdown\ \diagup & & & & \diagdown\ \diagup & \\
\{b_n\} & & b_1 & & b_2 & & b_3 & & \cdots\cdots\cdots\cdots & & b_n &
\end{array}$$

$$\boldsymbol{n \geqq 2}\textbf{のとき}\quad \boldsymbol{a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k}$$

(3)　(等差数列)×(等比数列)からなる数列の和 S は，等比数列の公比が r のとき，$S-rS$ を考えることにより求めることができる。

「数列」は確率など他の分野との融合問題や，日常や社会に関連した問題が入試によく出題される。公式や基本的な考え方をある程度押さえたら，過去問演習を通して対策したい。

8

(1)　$a_1=4$，$a_{n+1}=2a_n-3$ ($n=1$，2，3，……) で定義される数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2)　すべての自然数について，4^n-1 は 3 の倍数であることを証明せよ。

解答

(1)　特性方程式 $\alpha=2\alpha-3$ から　$\alpha=3$　　よって，$a_{n+1}=2a_n-3$ は $a_{n+1}-3=2(a_n-3)$と変形できる。

$a_n-3=b_n$ とおくと，$a_{n+1}-3=b_{n+1}$ であるから　$b_{n+1}=2b_n$　　ここで，$b_1=a_1-3=4-3=1$ より

$b_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$　　したがって　$\boldsymbol{a_n=2^{n-1}+3}$

(2)　(ⅰ)　$n=1$ のとき，$4^1-1=3$ より，3 の倍数である。

(ⅱ)　$n=k$ のとき，4^k-1 が 3 の倍数であると仮定する。

このとき，$n=k+1$ について考えると

$$4^{k+1}-1=4\cdot 4^k-1=4(4^k-1)+4-1=4(4^k-1)+3$$

> 4^k-1 が 3 の倍数であることが利用できるように式変形をする。

ここで，4^k-1 は 3 の倍数であるので，自然数 m を用いて，$4^k-1=3m$ とおける。よって，

$4(4^k-1)+3=4\cdot 3m+3=3(4m+1)$ から，$4^{k+1}-1$ も 3 の倍数である。

(ⅰ)，(ⅱ)から，すべての自然数 n について，4^n-1 は 3 の倍数である。

解　説

漸化式

$a_{n+1}=pa_n+q$ ($n=1$，2，3，……) 型の漸化式では，以下のように一般項を求める。

a_{n+1}，a_n の代わりに α とおいた方程式 $\alpha=p\alpha+q$（**特性方程式**）に対して，$a_{n+1}=pa_n+q$ と $\alpha=p\alpha+q$ の辺々を引くと　$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$　と変形できる。$a_n-\alpha=b_n$ とおくと $a_{n+1}-\alpha=b_{n+1}$ であるから

$b_{n+1}=pb_n$　　これは初項 $b_1=a_1-\alpha$，公比 p の等比数列であるから，数列$\{b_n\}$の一般項 $b_n=(a_1-\alpha)p^{n-1}$ が求まる。これにより数列$\{a_n\}$の一般項 $a_n=(a_1-\alpha)p^{n-1}+\alpha$ が求まる。

漸化式は(1)の形が基本となるが，そのほかにさまざまなパターンがある。漸化式の対策を完ぺきにしようとすると大変なので，過去問演習を通して徐々にマスターするという考え方も有効である。

数学的帰納法

自然数 n に関する事柄 P が，すべての自然数 n について成り立つことを証明するためには，次のことがいえればよい。

(ⅰ)　$n=1$ のとき，P が成り立つ。

(ⅱ)　任意の自然数 k に対して，$n=k$ のとき P が成り立つと仮定する。

　このとき，$n=k+1$ のときも P が成り立つ。

《補足》上の(ⅰ)，(ⅱ)がいえれば，なぜすべての自然数 n についていえたことになるのか？

(ⅰ)から，$n=1$ のとき P が成り立つ。(ⅱ)について，$k=1$ のときを考えると，$n=1+1=2$ のときも P が成り立つ。さらに，(ⅱ)について，$k=2$ のときを考えると，$n=3$ のときも P が成り立つ。

以下，$n=4$，5，6，…… と，すべての自然数 n について P が成り立つことがいえる。

9

(1)　袋の中に 1 から 4 までの番号が書かれた 4 個の玉がある。この中から，玉を戻して 1 個ずつ 2 回取り出したときの，最大の番号を X とする。確率変数 X の平均，分散，標準偏差を求めよ。

(2)　袋の中に $\boxed{1}$ から $\boxed{10}$ までのカードが各 1 枚，計 10 枚入っている。この袋からカードを 1 枚取り出して，番号を調べて元に戻す試行を 75 回繰り返す。このとき，素数の番号が出る回数 X の平均，分散，標準偏差を求めよ。

(3)　小学校 3 年生 100 人に九九の計算問題をランダムに 81 題解いてもらったところ，平均正解数は 75.0 題，標準偏差は 3.0 題であった。この正解数は正規分布に従うものとするとき，77 題以上正解した児童はおよそ何人いるか。

(4)　ある工場で製造された固形せっけん 100 個を無作為に抽出したところ，重さの平均値 90.0g，標本標準偏差 3.0g を得た。この工場で製造された固形せっけん全体の平均の重さを，信頼度 95%で推定せよ。

正規分布表

z_0	～	4	～	6	7
0.6		0.2389		0.2454	0.2486
～					
1.6		0.4495		0.4515	0.4525
～					
1.9		0.4738		0.4750	0.4756

当該ファイルに関連のある部分を抜粋しています。

(5)　これまでフリースロー成功率が 64%であったバスケットボール部員が，あるコーチに指導してもらった。この指導後のフリースローの記録を 100 回分無作為に抽出して調べたところ，70 回成功していた。このバスケットボール部員のフリースロー成功率は，あるコーチの指導後上がったと判断してよいか。有意水準 5%で検定せよ。

解答

(1)　X の確率分布は，右の表のようになる。

X	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	3	4
3	3	3	3	4
4	4	4	4	4

よって，**X の平均 $E(X)$ は**

$$E(X)=1\times\frac{1}{16}+2\times\frac{3}{16}+3\times\frac{5}{16}+4\times\frac{7}{16}=\frac{1+6+15+28}{16}=\frac{50}{16}=\mathbf{\frac{25}{8}}$$

X の分散 $V(X)$ は

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=1^2\times\frac{1}{16}+2^2\times\frac{3}{16}+3^2\times\frac{5}{16}+4^2\times\frac{7}{16}-\left(\frac{25}{8}\right)^2$$

$$=\frac{1+12+45+112}{16}-\frac{625}{64}=\frac{680-625}{64}=\mathbf{\frac{55}{64}}$$

X の標準偏差 $\sigma(X)$ は　$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{55}{64}}=\mathbf{\frac{\sqrt{55}}{8}}$

分散 $V(X)$ の別解

$$V(X)=E((X-m)^2)=\left(1-\frac{25}{8}\right)^2\times\frac{1}{16}+\left(2-\frac{25}{8}\right)^2\times\frac{3}{16}+\left(3-\frac{25}{8}\right)^2\times\frac{5}{16}+\left(4-\frac{25}{8}\right)^2\times\frac{7}{16}$$

$$=\frac{289+243+5+343}{1024}=\frac{880}{1024}=\frac{55}{64}$$

(2)　1 から 10 までの素数は 2，3，5，7 であるから，確率変数Xは二項分布$B\left(75,\ \frac{2}{5}\right)$に従う。

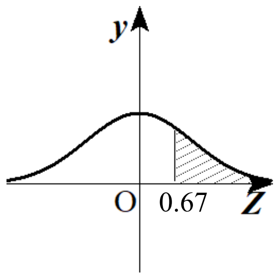
よって，**Xの平均$E(X)$は**　$E(X)=75\cdot\frac{2}{5}=\mathbf{30}$(回)

Xの分散$V(X)$は　$V(X)=75\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\mathbf{18}$

Xの標準偏差$\sigma(X)$は　$\sigma(X)=\sqrt{18}=\mathbf{3\sqrt{2}}$（回）

(3)　正解数をX題とすると，Xは$N(75.0,\ 3.0^2)$に従うから　$Z=\dfrac{X-75.0}{3.0}$とおくと，

Zは$N(0,\ 1)$に従う。



$X=77$ のとき$Z=\dfrac{77-75.0}{3.0}=0.67$ であるから

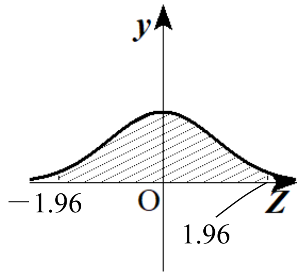
$P(X\geqq 77)=P(Z\geqq 0.67)=P(Z\geqq 0)-P(0\leqq Z\leqq 0.67)$

$=0.5-0.2486=0.2514$

よって，77 題以上正解した児童の人数は　$100\times 0.2514=25.14$

したがって，およそ　**25 人**

(4)　平均の重さを m とする。



標本の大きさ 100 は大きいので，母標準偏差 σ のかわりに標本標準偏差 $s=3.0$ を用いる。

標本平均 $\bar{x}=90.0$ であるから，m に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$90.0-1.96\times\frac{3.0}{\sqrt{100}}\leqq m\leqq 90.0+1.96\times\frac{3.0}{\sqrt{100}}$$

すなわち　$89.412\leqq m\leqq 90.588$

したがって，固形せっけん全体の平均の重さは **89.4g 以上 90.6g 以下** と推定できる。

(5)　仮説を「コーチの指導後，成功率は上がらなかった。」とする。

仮説が正しいとすると，100 回のうちフリースローが成功する回数 X は，二項分布 $B(100,\ 0.64)$に従う。

X の平均 m と標準偏差 σ は

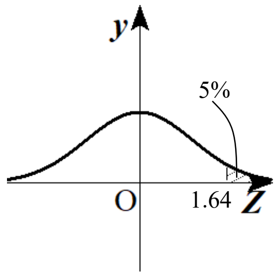
$m=100\cdot 0.64=64$

$\sigma=\sqrt{100\cdot 0.64\cdot(1-0.64)}=10\cdot 0.8\cdot 0.6=4.8$

> 詳しくは，対立仮説「コーチの指導後，成功率が上がった。」，帰無仮説「コーチの指導後，成功率は上がらなかった。」である。

よって，$Z=\dfrac{X-64}{4.8}$は近似的に標準正規分布$N(0,\ 1)$に従う。正規分布表により$P(Z\geqq 1.64)\fallingdotseq 0.95$

であるから，有意水準 5%の棄却域は　$Z\geqq 1.64$　……①



$X=70$ のとき$Z=\dfrac{70-64}{4.8}=1.25$ であり，この値は棄却域①に入らないから，仮説は棄却できない。

したがって，コーチの指導後にフリースローの成功率は

上がったとは判断できない。

解　説

確率変数 X が，右の表のような確率分布に従い，平均が m であるとき，次が成り立つ。

X	x_1	x_2	x_3	……	x_n	計
P	p_1	p_2	p_3	……	p_n	1

確率変数 X の分散と標準偏差

$$\boldsymbol{V(X)=E((X-m)^2)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2p_k} \qquad \boldsymbol{\sigma(X)=\sqrt{V(X)}}$$

また，$\boldsymbol{V(X)=E\left(X^2\right)-\{E(X)\}^2}$ と表すこともできる。

確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$に従うとき

$$\boldsymbol{E(X)=np,\quad V(X)=npq,\quad \sigma(X)=\sqrt{npq}} \qquad \text{ただし}\quad \boldsymbol{q=1-p}$$

確率変数の標準化

確率変数Xが正規分布$N\left(m,\ \sigma^2\right)$に従うとき$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$とおくと，確率変数$Z$は標準正規分布$N\left(0,\ 1\right)$に従う。

一般に，標本平均$\bar{X}$について，次のことが成り立つ。

　　母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から，大きさ n の標本を復元抽出するとき，

　　標本平均$\bar{X}$の平均 $E(\bar{X})$，標準偏差$\sigma(\bar{X})$は　　$\boldsymbol{E(\bar{X})=m,\quad \sigma(\bar{X})=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

また一般に，母平均と母標準偏差をもつどのような母集団についても，標本平均$\bar{X}$の確率分布は，標本の大きさ n が大きくなると，正規分布に近づくことが知られている。

　　母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から，大きさ n の標本を無作為抽出するとき，

　　nが大きいならば，標本平均$\bar{X}$の分布は，**正規分布$\boldsymbol{N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)}$**で近似できる。

　　標本平均$\bar{X}$を標準化した確率変数$Z=\dfrac{\bar{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$は，近似的に**標準正規分布$\boldsymbol{N\left(0,\ 1\right)}$**に従う。

仮説検定において，確率変数が正規分布に従う連続的な値をとるとき，有意水準 p_0 に対して立てた仮説のもとでは実現しにくい確率変数の値の範囲を，その範囲の確率が p_0 になるように定める。この範囲を有意水準 p_0 の **棄却域** といい，実現した確率変数の値が棄却域に入れば仮説を棄却する。

以上をまとめると，一般に仮説検定の手順は次のようになる。

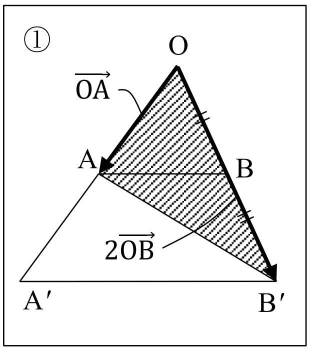
1. **あるめったに起こらない事象 A が起こった場合，対立仮説 H_1 を立てる。**
2. **H_1 に対する帰無仮説 H_0 を立てる。**
3. **あらかじめ定めている有意水準 p_0 と H_0 から棄却域を求める。**
4. **標本から得られた確率変数の値が棄却域に入るかどうかを調べ，仮説 H_0 が棄却できるかどうかを判断する。**

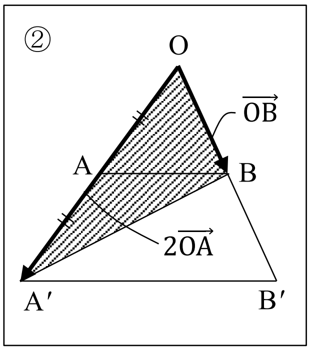
「統計的な推測」の入試対策は，各種公式を押さえたあと，正規分布表を用いて確率を求めたり，母平均の推定，仮説検定を行ったりする際の，標準正規分布への変換に慣れてから，本格的に取り組みたい。

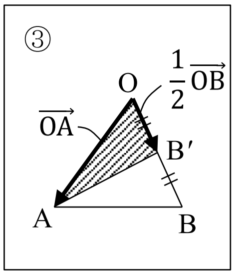
１０

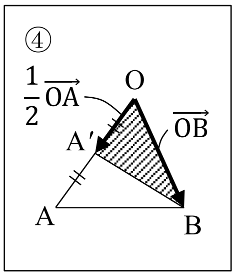
(1)　2 つのベクトル $\vec{a}=(\sqrt{3},\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ -\sqrt{3})$ のなす角θを求めよ。

(2)　△ABC に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$とする。実数$s$，$t$が，条件 $s+2t\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ を満たしながら動くとき，点 P の存在範囲は次の①～④のどれか。









(3)　$\vec{a}=(2,\ -1,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ 0,\ 4)$ とする。ベクトル $\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさが最小になるときの実数tの値と，そのときの大きさを求めよ。

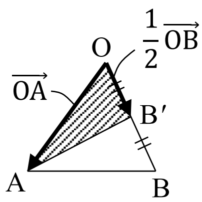
解答

(1)　$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}\times 3+1\times(-\sqrt{3})}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}\sqrt{3^2+(-\sqrt{3})^2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\cdot 2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$　　$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ であるから　$\boldsymbol{\theta=60^\circ}$

(2)　$s+2t\leqq 1$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2t\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

ここで，$s=s'$，$2t=t'$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t'\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\qquad s'+t'\leqq 1,\ s'\geqq 0,\ t'\geqq 0$$



よって，$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ となるような点B′ をとると，

点 P の存在範囲は△OAB′ の周上および内部である。

したがって　③

(3)　$\vec{a}+t\vec{b}=(2,\ -1,\ 1)+t(3,\ 0,\ 4)=(2+3t,\ -1,\ 1+4t)$

よって　$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2=(2+3t)^2+(-1)^2+(1+4t)^2=4+12t+9t^2+1+1+8t+16t^2$

$$=25t^2+20t+6=25\left(t^2+\frac{4}{5}t\right)+6=25\left\{\left(t+\frac{2}{5}\right)^2-\frac{4}{25}\right\}+6$$

$$=25\left(t+\frac{2}{5}\right)^2-4+6=25\left(t+\frac{2}{5}\right)^2+2$$

したがって，$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2$は$t=-\dfrac{2}{5}$のとき最小となり，$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|\geqq 0$ であるから，

$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$も$t=-\dfrac{2}{5}$のとき最小となる。以上から，$\boldsymbol{t=-\dfrac{2}{5}}$**のとき最小値**$\boldsymbol{\sqrt{2}}$

解　説

平面上のベクトルのなす角

$\vec{0}$でない 2 つのベクトル$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$のなす角をθとすると，次のことが成り立つ。

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}}$$

ただし　$0°\leqq\theta\leqq 180°$

ベクトルの終点の存在範囲

$\boxed{1}$　点 **P** が線分 **AB** 上にある

$\iff \overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　　$s+t=1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

$\boxed{2}$　点 **P** が△**OAB** の周上および内部にある

$\iff \overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　　$s+t\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

空間のベクトルの大きさ

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$のとき　　$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}$

「ベクトル」は比較的典型的な問題が多いので，対策をした分だけ得点率が上がる傾向がある。
出題率も高いので，微分と積分同様，重点的に対策したい。