1 次の問いに答えよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。（(1), (2) 各 15 点, 計 30 点）

(1) 20^{23} は何桁の整数か。

(2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$ を小数で表すと，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

解答

(1) 20^{23} の常用対数の値を求める。

$\log_{10}20^{23}=23\log_{10}20$
$=23(\log_{10}2+\log_{10}10)$
$=23(0.3010+1)$
$=29.923$

よって $20^{23}=10^{29.923}$
$10^{29}<10^{29.923}<10^{30}$
であるから
$10^{29}<20^{23}<10^{30}$
したがって，20^{23} は
30 桁の整数である。

$10^{29}=1\underbrace{00\cdots\cdots00}_{29\text{ 個}}$ 30 桁

$10^{30}=1\underbrace{00\cdots\cdots00}_{30\text{ 個}}$ 31 桁

(2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$ の常用対数の値を求める。

$$\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{20}=20\log_{10}\frac{2}{3}$$
$$=20(\log_{10}2-\log_{10}3)$$
$$=20(0.3010-0.4771)$$
$$=-3.522$$

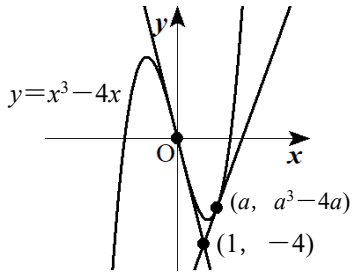
よって $\left(\frac{2}{3}\right)^{20}=10^{-3.522}$
$10^{-4}<10^{-3.522}<10^{-3}$
であるから
$10^{-4}<\left(\frac{2}{3}\right)^{20}<10^{-3}$
したがって，$\left(\frac{2}{3}\right)^{20}$ は**小数第 4 位**に初めて 0 でない数字が現れる。

$10^{-4}=\underbrace{0.000}_{4\text{ 個}}1$ 小数第 4 位

$10^{-3}=\underbrace{0.00}_{3\text{ 個}}1$ 小数第 3 位

2 点(1，−4)から曲線 $y=x^3-4x$ に引いた接線の方程式を求めよ。（25 点）

解答



$f(x)=x^3-4x$ とすると
$f'(x)=3x^2-4$
接点の座標を$(a，a^3-4a)$
とおくと，その点における
接線の傾きは
$f'(a)=3a^2-4$
よって，この接線の方程式は
$y-(a^3-4a)=(3a^2-4)(x-a)$
すなわち $y=(3a^2-4)x-3a^3+4a+(a^3-4a)$
$=(3a^2-4)x-2a^3$ ……①
直線①が点(1，−4)を通るから $-4=(3a^2-4)\cdot1-2a^3$
$2a^3-3a^2-4+4=0$ $2a^3-3a^2=0$ $a^2(2a-3)=0$

これを解くと $a=0,\ \frac{3}{2}$

$a=0$ のとき，①は $y=-4x$

$a=\frac{3}{2}$ のとき，①は $y=\left(3\cdot\frac{9}{4}-4\right)x-2\cdot\frac{27}{8}=\frac{11}{4}x-\frac{27}{4}$

以上から，求める接線の方程式は $\boldsymbol{y=-4x,\quad y=\frac{11}{4}x-\frac{27}{4}}$

3 あるスーパーマーケットの利用者の中から無作為に選んだ100人にレジの待ち時間を聞いたところ，標本平均が5.0分，標本標準偏差が10.0分であった。このスーパーマーケットのレジの平均待ち時間を，信頼度95%で区間推定せよ。（20点）

解答

レジの平均待ち時間を m とする。

標本の大きさ100は大きいので，母標準偏差 σ のかわりに標本標準偏差 $s=10.0$ を用いる。

標本平均 $\bar{x}=5.0$ であるから，m に対する信頼度95% の信頼区間は

$$5.0-1.96\times\frac{10.0}{\sqrt{100}}\leqq m\leqq 5.0+1.96\times\frac{10.0}{\sqrt{100}}$$

すなわち　$3.04\leqq m\leqq 6.96$

したがって，レジの平均待ち時間は

3.0分以上7.0分以下

と推定できる。

4 △OABにおいて，

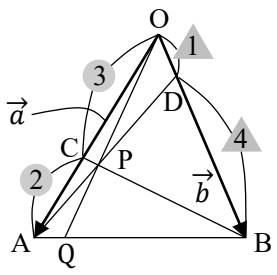
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。

辺OAを3：2に内分する点をC，辺OBを1：4に内分する点をD，

線分ADとBCの交点をP とし，

直線OPと辺ABの交点をQとする。次のベクトルを，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。　（(1) 15点，(2) 10点，計25点）

(1)　$\overrightarrow{OP}$　　(2)　$\overrightarrow{OQ}$



解答

(1)　点Pは線分AD上にあるから，

実数 s を用いて

AP：PD＝s：(1−s)

とすると

$$\overrightarrow{OP}=s\,\overrightarrow{OD}+(1-s)\,\overrightarrow{OA}$$

$$=(1-s)\,\vec{a}+\frac{1}{5}s\,\vec{b}\quad\cdots\cdots①$$

また，点Pは線分BC上にあるから，実数 t を用いて

BP：PC＝t：(1−t)　とすると

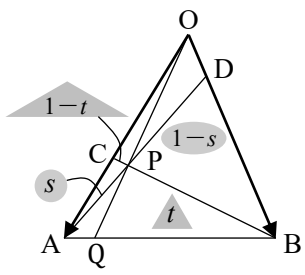
$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\,\overrightarrow{OB}+t\,\overrightarrow{OC}=\frac{3}{5}t\,\vec{a}+(1-t)\,\vec{b}\quad\cdots\cdots②$$

①，②から　$(1-s)\,\vec{a}+\frac{1}{5}s\,\vec{b}=\frac{3}{5}t\,\vec{a}+(1-t)\,\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから　$\begin{cases}1-s=\frac{3}{5}t\\ \frac{1}{5}s=1-t\end{cases}$

これを解くと　$s=\frac{5}{11}$，　$t=\frac{10}{11}$

したがって　$\boldsymbol{\overrightarrow{OP}=\frac{6}{11}\vec{a}+\frac{1}{11}\vec{b}}$



(2)　点Qは辺AB上にあるから，実数 u を用いて

AQ：QB＝u：(1−u)　とすると

$$\overrightarrow{OQ}=u\,\overrightarrow{OB}+(1-u)\,\overrightarrow{OA}=(1-u)\,\vec{a}+u\,\vec{b}\quad\cdots\cdots①$$

また，点Qは直線OP上にあるから，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{OQ}=k\,\overrightarrow{OP}\quad\text{とすると}$$

$$\overrightarrow{OQ}=k\left(\frac{6}{11}\vec{a}+\frac{1}{11}\vec{b}\right)=\frac{6}{11}k\,\vec{a}+\frac{1}{11}k\,\vec{b}\quad\cdots\cdots②$$

①，②から　$(1-u)\,\vec{a}+u\,\vec{b}=\frac{6}{11}k\,\vec{a}+\frac{1}{11}k\,\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから　$\begin{cases}1-u=\frac{6}{11}k\\ u=\frac{1}{11}k\end{cases}$

これを解くと　$u=\frac{1}{7}$，　$k=\frac{11}{7}$

したがって　$\boldsymbol{\overrightarrow{OQ}=\frac{6}{7}\vec{a}+\frac{1}{7}\vec{b}}$