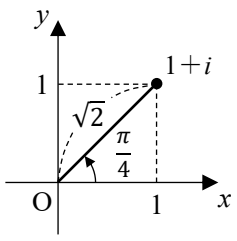
1 次の問いに答えよ。 ((1), (2) 各 10 点, 計 20 点)

(1) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^6$ を計算せよ。

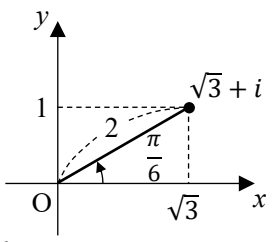
(2) 方程式 $z^3=-i$ を解け。

解答

(1) $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$



$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$



よって

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^6=\left\{\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}\right\}^6$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6\cdot\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right\}^6$$

$$=\frac{8}{64}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^6$$

$$=\frac{1}{8}\left(\cos\frac{6}{12}\pi+i\sin\frac{6}{12}\pi\right)=\frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{8}i}$$

(2) $r>0$，$0\leqq\theta<2\pi$ として，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと，ド・モアブルの定理により

$$z^3=r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)$$

また，$-i$ の極形式は $-i=\cos\dfrac{3}{2}\pi+i\sin\dfrac{3}{2}\pi$

よって $r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)=\cos\dfrac{3}{2}\pi+i\sin\dfrac{3}{2}\pi$

ここで，$-i$ の偏角は $\dfrac{3}{2}\pi+2k\pi$ $(k$は整数$)$ であるから，

両辺の絶対値と偏角を比較すると

$$r^3=1,\quad 3\theta=\frac{3}{2}\pi+2k\pi\ (k\text{は整数})$$

$r>0$ であるから $r=1$　　また $\theta=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{2}{3}k\pi$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で考えると $k=0,\ 1,\ 2$

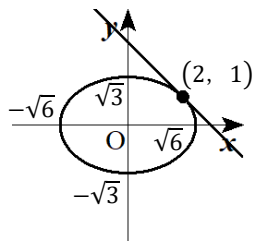
したがって，$\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$ であるから，求める解は

$$z=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2},\quad \cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi,\quad \cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi$$

すなわち $\boldsymbol{z=i,\ \dfrac{-\sqrt{3}-i}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}-i}{2}}$

2 楕円 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 上の点 $(2,\ 1)$ における接線の方程式について，y 軸に平行な直線は接線にはならないので，傾きを m として $y-1=m(x-2)$ とおくことができる。

このとき，m の値を求めよ。 (20 点)



解答

接線の方程式 $y=m(x-2)+1$ を

楕円の方程式 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$ に代入すると

$$\frac{x^2}{6}+\frac{\{m(x-2)+1\}^2}{3}=1$$

$$x^2+2\{m^2(x-2)^2+2m(x-2)+1\}=6$$

$$x^2+2m^2(x^2-4x+4)+4m(x-2)+2=6$$

$$x^2+2m^2x^2-8m^2x+8m^2+4mx-8m+2=6$$

$$(2m^2+1)x^2+(-8m^2+4m)x+8m^2-8m-4=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると，$D=0$ となるから

$$D=(-8m^2+4m)^2-4(2m^2+1)(8m^2-8m-4)$$

$$=64m^4-64m^3+16m^2-4(16m^4-16m^3-8m^2+8m^2-8m-4)$$

$$=64m^4-64m^3+16m^2$$

$$-64m^4+64m^3+32m^2-32m^2+32m+16$$

$$=16m^2+32m+16=16(m+1)^2=0$$

よって $\boldsymbol{m=-1}$

参考 $m=-1$ を $y=m(x-2)+1$ に代入すると

$$y=-(x-2)+1=-x+3$$

$y=-x+3$ を変形すると $x+y=3$　　$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{3}=1$

$$\frac{2x}{6}+\frac{1\cdot y}{3}=1$$

一般に，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における

接線の方程式は $\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$ と表すことができる。

3 関数$f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}-ax^n+a}{x^n-2}$が$x\geqq 0$において連続になるように定数$a$の値を定めよ。（20点）

解答

$x>1$のとき

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x-a+\dfrac{a}{x^n}}{1-\dfrac{2}{x^n}}=\frac{x-a+0}{1-0}=x-a$$

$x=1$のとき

$$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{n+1}-a\cdot 1^n+a}{1^n-2}=\frac{1-a+a}{1-2}=-1$$

$0\leqq x<1$のとき

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}-ax^n+a}{x^n-2}=\frac{0-a\cdot 0+a}{0-2}=-\frac{a}{2}$$

$f(x)$は$0\leqq x<1$，$1<x$において連続である。

よって，$f(x)$が$x\geqq 0$において連続になるための条件は，

$x=1$で連続であることである。

ここで　$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{a}{2}$

$$\lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}(x-a)=1-a$$

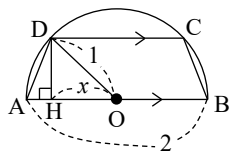
であり，$f(1)=-1$であるから

$$-\frac{a}{2}=-1\quad\text{かつ}\quad 1-a=-1$$

を満たせばよい。したがって　$\boldsymbol{a=2}$

4 中心をOとし，直径ABの長さが2である半円がある。

この半円に，右の図のような線分ABを下底とする台形ABCDを内接させ，OH＝xとおくとき，台形ABCDの面積の最大値とそのときのxの値を求めよ。（20点）



解答

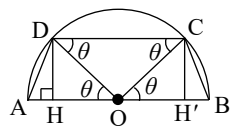
$0<x<1$である。

∠AOD＝θとおくと

DC // AB，OD＝OCであるから

∠AOD＝∠ODC＝∠OCD＝∠COB＝θ

ここで点Cから辺ABに垂線CH′を引いたとき，OD＝OC＝1であるから



$$x=\mathrm{OH}=\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OD}}=\cos\theta=\frac{\mathrm{OH'}}{\mathrm{OC}}=\mathrm{OH'}$$

よって　HH′＝$2x$

四角形HH′CDは長方形であるから　DC＝$2x$

また，$\mathrm{DH}=\sqrt{1-x^2}$より，台形ABCDの面積Sは

$$S=\frac{1}{2}(\mathrm{DC}+\mathrm{AB})\cdot\mathrm{DH}=\frac{1}{2}(2x+2)\cdot\sqrt{1-x^2}$$

$$=(x+1)\sqrt{1-x^2}$$

$$S'=\sqrt{1-x^2}+(x+1)\cdot\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)$$

$$=\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2-x(x+1)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-x^2-x^2-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\frac{2x^2+x-1}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{(x+1)(2x-1)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$0<x<1$において，$S'=0$となるのは　$x=\dfrac{1}{2}$

右の増減表より，

台形ABCDの面積の最大値は

$$\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$$

そのときのxの値は

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{2}}$$

x	0	…	$\frac{1}{2}$	…	1
S'	／	＋	0	－	／
S	／	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	／

$S=(x+1)\sqrt{1-x^2}$

に$x=\dfrac{1}{2}$を代入すると

$$\left(\frac{1}{2}+1\right)\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

5 次の定積分を求めよ。 ((1), (2) 各 10 点, 計 20 点)

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x}\,dx$ (2) $\displaystyle\int_1^3 \frac{\log x}{x^2}\,dx$

解答

(1) $\log x = t$ とおくと

$$\frac{1}{x}dx = dt$$

x	$1 \longrightarrow e$
t	$0 \longrightarrow 1$

x と t の対応は右のようになる。

よって $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x}dx = \int_0^1 t\cdot dt$

$$= \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

(2) $\displaystyle\int_1^3 \frac{\log x}{x^2}dx = \int_1^3 \left(-\frac{1}{x}\right)' \log x\,dx$

$$= \left[-\frac{1}{x}\log x\right]_1^3 - \int_1^3 \left(-\frac{1}{x}\right)\cdot(\log x)'\,dx$$

$$= -\frac{\log 3}{3} + \int_1^3 \frac{1}{x^2}dx$$

$$= -\frac{\log 3}{3} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^3$$

$$= -\frac{\log 3}{3} + \left(-\frac{1}{3}+1\right)$$

$$= \mathbf{-\frac{\log 3}{3} + \frac{2}{3}}$$