1 絶対値が 1 で，z^2+z が実数であるような複素数 z を求めよ。（15 点）

解答

zの絶対値は 1 なので，$|z|=1$ から　$z\overline{z}=1$　……①

また，z^2+z が実数であるので

$z^2+z=\overline{z^2+z}$　すなわち　$z^2+z=(\overline{z})^2+\overline{z}$　……②

が成り立つ。

①より　$\overline{z}=\dfrac{1}{z}$　これを②に代入すると　$z^2+z=\left(\dfrac{1}{z}\right)^2+\dfrac{1}{z}$

整理すると

$z^4+z^3-z-1=0$

1	1	1	0	−1	−1
		1	2	2	1
	1	2	2	1	0

$(z-1)(z^3+2z^2+2z+1)=0$

−1	1	2	2	1
		−1	−1	−1
	1	1	1	0

$(z-1)(z+1)(z^2+z+1)=0$

これを解いて　$\boldsymbol{z=1,\ -1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}}$

2 次の極限値を求めよ。　（(1), (2) 各 15 点, 計 30 点）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^3}{\sin 3x-3\sin x}$

解答

(1) $\cos x-\cos 2x$

$=\cos x-(2\cos^2x-1)$

$=-2\cos^2x+\cos x+1$

$=-(2\cos^2x-\cos x-1)$

$=-(\cos x-1)(2\cos x+1)$

$=(1-\cos x)(2\cos x+1)$

1	×	−1	→ −2
2	×	1	→ 1
			−1

であるから

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(2\cos x+1)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)(2\cos x+1)}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos^2 x)(2\cos x+1)}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x\,(2\cos x+1)}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{2\cos x+1}{1+\cos x}$$

$$=1^2\cdot\frac{2\cdot1+1}{1+1}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

(2) $\sin3x=\sin(x+2x)=\sin x\cos2x+\cos x\sin2x$

$=\sin x(1-2\sin^2x)+\cos x\cdot2\sin x\cos x$

$=\sin x-2\sin^3x+2\sin x\cos^2x$

$=\sin x-2\sin^3x+2\sin x(1-\sin^2x)$

$=\sin x-2\sin^3x+2\sin x-2\sin^3x$

$=-4\sin^3x+3\sin x$

であるから

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3}{\sin 3x-3\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{-4\sin^3 x+3\sin x-3\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{-4\sin^3 x}$$

$$=-\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^3$$

$$=\boldsymbol{-\frac{1}{4}}$$

3 関数$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ について，次の問いに答えよ。

（(1)，(2) 各 15 点，計 30 点）

(1) 関数$y=f(x)$のグラフの概形をかけ。

ただし，$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ を用いてよい。

(2) (1)の結果を用いて，e^{π} と π^{e} の大小を比較せよ。

解答

(1) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\log x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{-x-2x+2x\log x}{x^4}$$

$$=\frac{-3+2\log x}{x^3}$$

$f'(x)=0$ とすると，$1-\log x=0$ から　$x=e$

$f''(x)=0$ とすると，$-3+2\log x=0$ から　$\log x=\dfrac{3}{2}$

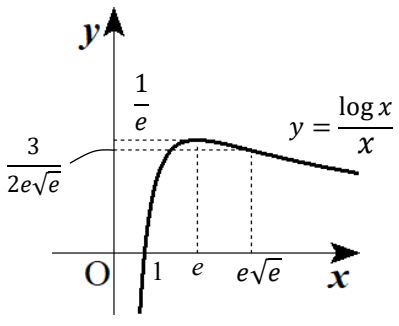
よって　$x=e^{\frac{3}{2}}=e\sqrt{e}$

以上から，$x>0$ における増減表は次のようになる。

x	0	…	e	…	$e\sqrt{e}$	…
f'	＼	＋	0	−	−	−
f''	＼	−	−	−	0	＋
f	＼	↱	$\dfrac{1}{e}$	↘	$\dfrac{3}{2e\sqrt{e}}$	↳

$\lim_{x\to+0} f(x)=-\infty$，$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ であるから，

グラフは次の図のようになる。



(2) (1)より，$x>0$ における$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$は，$x=e$のとき最大値をとるので　$f(e)>f(\pi)$

すなわち　$\dfrac{\log e}{e}>\dfrac{\log \pi}{\pi}$

変形すると　$\pi\log e>e\log\pi$　　$\log e^{\pi}>\log\pi^{e}$

したがって　$\boldsymbol{e^{\pi}>\pi^{e}}$

4 次の問いに答えよ。　（(1) 10 点, (2) 15 点, 計 25 点）

(1) $x=2\cos^2\theta$，$y=2\sin\theta\cos\theta$ のように媒介変数表示された曲線は，どのような図形を表すか。

(2) 曲線$x=2\cos^2\theta$，$y=2\sin\theta\cos\theta$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}\right)$ の長さLを求めよ。

解答

(1) $x=2\cos^2\theta=(2\cos^2\theta-1)+1=\cos 2\theta+1$,

$y=2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$　であるので

$x=\cos 2\theta+1$ から　$\cos 2\theta=x-1$,

$y=2\sin\theta\cos\theta$ から　$\sin 2\theta=y$

これらを，$\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta=1$ に代入すると

$(x-1)^2+y^2=1$

よって，**中心(1，0)，半径 1 の円**を表す。

(2) $x=\cos 2\theta+1$ より　$\dfrac{dx}{d\theta}=2\cdot(-\sin 2\theta)=-2\sin 2\theta$,

$y=\sin 2\theta$ より　$\dfrac{dy}{d\theta}=2\cos 2\theta$

であるから

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{(-2\sin 2\theta)^2+(2\cos 2\theta)^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{4(\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta)}\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=2\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}$$