

三角形を解く [三角形の決定条件]

1

Hさん：三角形には3つの辺と3つの角があって、いくつかの辺や角が与えられたとき、残りの辺や角を求めることを「三角形を解く」というらしいよ。

Tくん：ふーん。そうなんだ。そういえば、そういう問題、たくさん解いたよ。テストにも出たな～

Hさん：正弦定理、余弦定理は覚えてる？

Tくん：うーん。多分・・・

問題 次の枠を埋めてみよう。

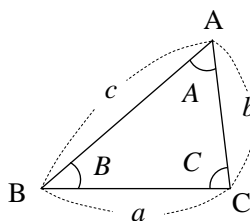
解答

右の図の△ABCにおいて、

$BC=a, CA=b, AB=c,$

$\angle A=A, \angle B=B, \angle C=C$

とする。



正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad (R \text{ は, } \triangle ABC \text{ の外接円の半径})$$

余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

2

Hさん：与えられた条件によって、どの定理を用いればよいのかを考えると楽しいね。

Tくん：楽しいかな～？適当に式に値を代入して、何かが求められたらラッキー！って感じだけど。

Hさん：・・・・・・・・

Tくん：三角形が1通りの場合と2通りの場合があるのは何でだろう？って、思ったよ。

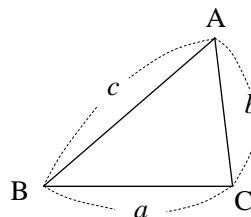
Hさん：それはいいところに目を付けたね！

問題 次の場合、三角形が1通りに定まるか、定まらないかを調べてみよう。

解答

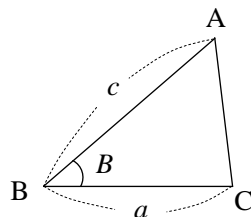
(1) 3 辺が与えられたとき

1 通りに定まる。



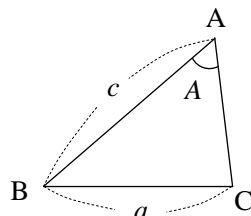
(2) 2 辺とその間の角が与えられたとき

1 通りに定まる。



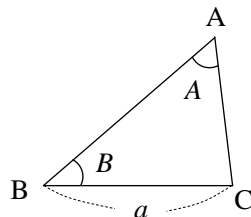
(3) 2 辺とその間ではない角が与えられたとき

1 通りに定まらない。



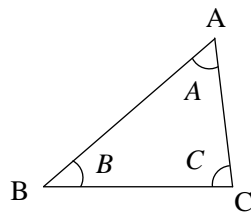
(4) 1 辺と 2 つの角が与えられたとき

1 通りに定まる。



(5) 3 つの角が与えられたとき

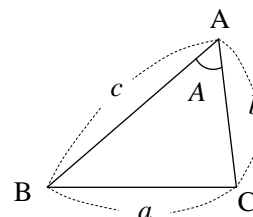
1 通りに定まらない。



補足 三角形が 1 つに定まる条件は、三角形の合同条件と一致する。

3 H さん： **2** の(3)について、もう少し詳しく調べてみましょう。

問題 **2** の(3)において、右の図のように b を考え、 b に関する方程式を作り、その解と三角形の関係を考察してみよう。



解答

余弦定理により $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$ b について整理すると $b^2 - (2ccosA)b + c^2 - a^2 = 0$
 これは b に関する 2 次方程式であるから、 $a, c, cosA$ の値によって次の場合がある。

- (i) 異なる 2 つの実数解をもつ
- (ii) ただ 1 つの実数解 (重解) をもつ
- (iii) 実数解をもたない

これらは、 $\triangle ABC$ が

- (i) 2 つに定まる
- (ii) 1 つに定まる
- (iii) 存在しない

場合と対応している。

別の考え方

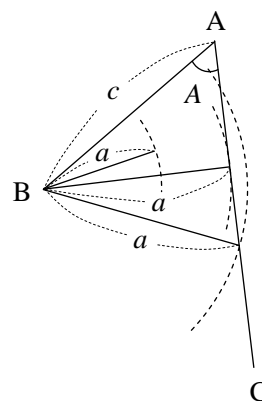
辺の長さ c と角 A が固定されていると考え、
 辺の長さ a がいろいろな値をとると考える。
 点 B を中心とし、半径 a の円を考えると、
 半直線 AC と

- (i) 交点をもたない
- (ii) 接する (交点が 1 つ)
- (iii) 2 点で交わる

場合がある。これらは、 $\triangle ABC$ が

- (i) 存在しない
- (ii) 1 つに定まる
- (iii) 2 つに定まる

場合と対応している。



コメント

「三角形を解く」問題において、2 つの角度が分かっていたら内角の和が 180° であることからもう 1 つの角度も分かる。

1 つ目、2 つ目の角度を求めるとき三角方程式を解くことになるが、数学 I の知識では解けない場合がある。

例えば、右の図のような 3 辺が与えられた三角形において、
 余弦定理を用いることにより角が求められる。

(図には、求めた角度も書き込んでいる。)

$cos75^\circ$ の値は未習のため $cosB$ の値は求められない。これは判断ミスではなく、ただ運が悪かったというしかない。この場合は、改めて $cosA$ や $cosC$ を計算し直すことになる。

「三角形を解く」問題で角度を求めるとき、三角方程式が解けない場合があることを把握しておきたい。

