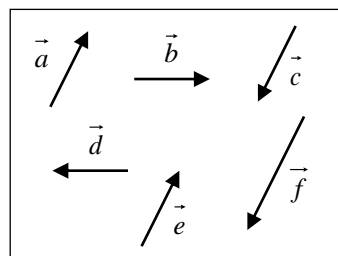


平面上のベクトル

1 ベクトル

右の図において、次のベクトルを選べ。

- (1) 等しいベクトル
- (2) 大きさが等しいベクトル
- (3) 向きが等しいベクトル



要 点

ベクトルとは・・・

大きさと向きをもつもの。図示するときは矢印で表すと分かりやすい。

平行移動して一致するベクトルは、等しいベクトルである。

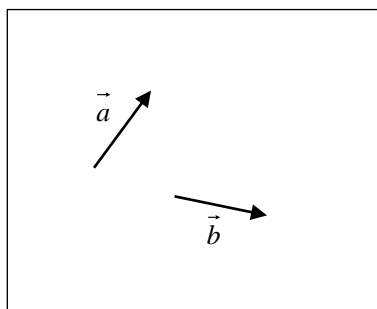
「力のつり合い」などを考えるとき、ベクトルで考えると分かりやすくなる。

解答

- (1) \vec{a} と \vec{e}
- (2) \vec{a} と \vec{c} と \vec{e} , \vec{b} と \vec{d}
- (3) \vec{a} と \vec{e} , \vec{c} と \vec{f}

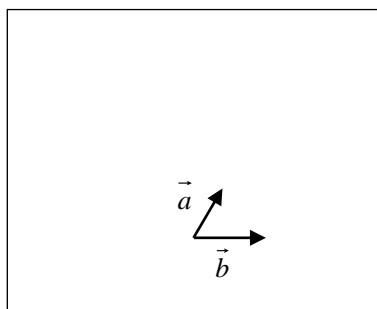
2 ベクトルの加法, 減法, 実数倍

- (1) 右の図の2つのベクトル \vec{a} , \vec{b} について,
 $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ を図示せよ。



- (2) 右の図の2つのベクトル \vec{a} , \vec{b} について,
次のベクトルを図示せよ。

- ① $3\vec{a}$ ② $-2\vec{b}$
- ③ $2\vec{a} - \vec{b}$

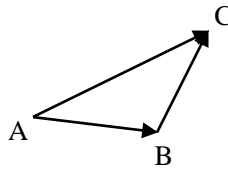


要 点

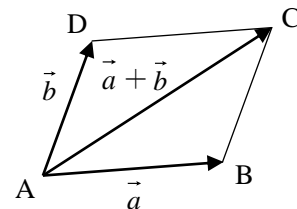
ベクトルの加法

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

と定める。



平行四辺形 ABCD において、2つのベクトル $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ とすると、ベクトルの和 $\vec{a} + \vec{b}$ は対角線 AC で図示できる。



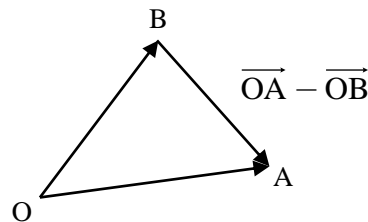
ベクトル \vec{a}, \vec{b} の加法 $\vec{a} + \vec{b}$ では、 \vec{a} の終点を \vec{b} の始点に合わせると、 \vec{a} の始点と \vec{b} の終点をつないだもの。
 \vec{a} と \vec{b} の始点を合わせれば、 \vec{a} と \vec{b} を2辺にもつ平行四辺形の対角線のうち、始点が共通となるもの。

ベクトルの減法

$-\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BO}$ と定める。

$-\overrightarrow{OB}$ を \overrightarrow{BO} の逆ベクトル という。

$$\begin{aligned} \text{このとき } \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} \\ &= \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA} \end{aligned}$$



O を任意の点とすると

$$\overrightarrow{O終} - \overrightarrow{O始} = \overrightarrow{始終}$$

とまとめることができる。

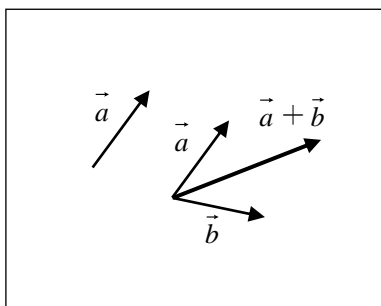
ベクトルの実数倍

ベクトル \vec{a} と実数 k に対して、 $k\vec{a}$ を次のように定める。

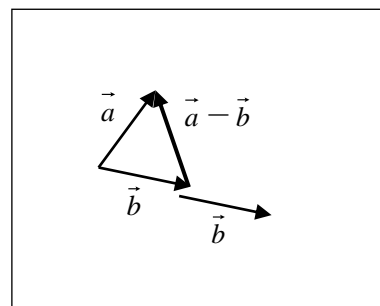
- $k > 0$ のとき、 $k\vec{a}$ は \vec{a} と同じ向きで、大きさは $|\vec{a}|$ の k 倍
 (注意) $|\vec{a}|$ はベクトル \vec{a} の大きさ
- $k < 0$ のとき、 $k\vec{a}$ は \vec{a} と反対の向きで、大きさは $|\vec{a}|$ の $|k|$ 倍
- $k = 0$ のとき $k\vec{a} = \vec{0}$

解答

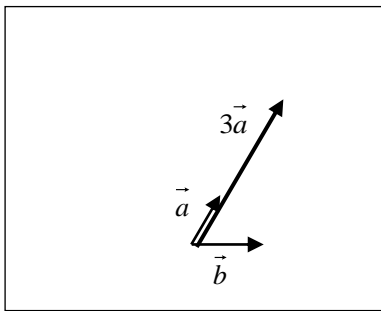
(1) $\vec{a} + \vec{b}$



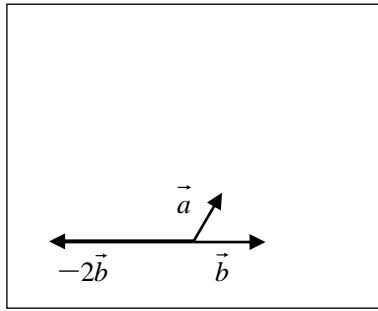
$\vec{a} - \vec{b}$



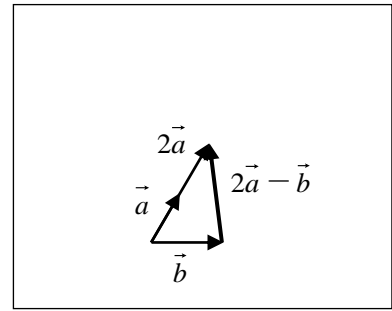
(2) ① $3\vec{a}$



② $-2\vec{b}$



③ $2\vec{a} - \vec{b}$



3 ベクトルの演算

等式 $3(\vec{a} + 2\vec{x}) - \vec{b} = 2(\vec{x} + 4\vec{b}) + \vec{x}$ を満たすベクトル \vec{x} を, \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。

要 点

k, l を実数とする。

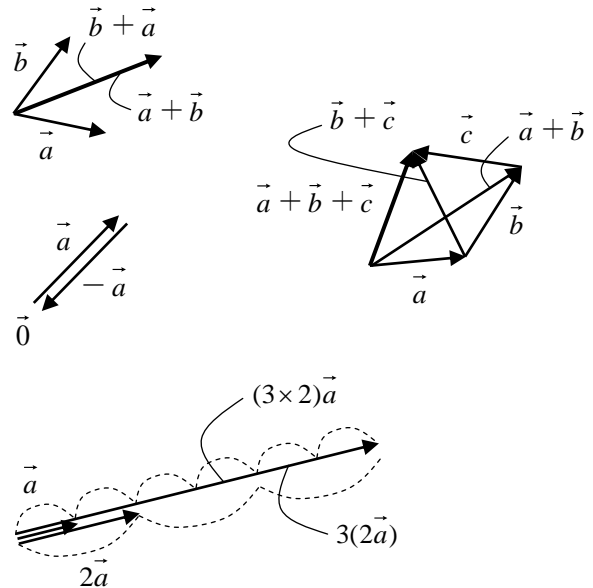
ベクトルの加法, 減法, 実数倍については, 文字式と同じように計算できる。

- ① 交換法則 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- ② 結合法則 $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- ③ 逆ベクトル $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
- ④ $\vec{0}$ の計算 $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

〈注意〉 始点と終点が一致するベクトルを
零ベクトル といい, $\vec{0}$ で表す。

- ⑤ $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$
- ⑥ $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$
- ⑦ $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

〈注意〉 ② は $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, ⑤ は $kl\vec{a}$
と表すことができる。

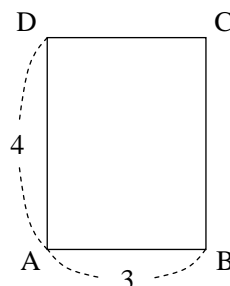


解答

展開すると $3\vec{a} + 6\vec{x} - \vec{b} = 2\vec{x} + 8\vec{b} + \vec{x}$ よって $\vec{x} = -\vec{a} + 3\vec{b}$

4 ベクトルの平行, 単位ベクトル

右の図のような長方形 ABCD において,
 \vec{AC} と平行な単位ベクトルを \vec{AB} , \vec{AD}
を用いて表せ。



要 点

ベクトルの平行

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = k\vec{a}$ となる実数 k がある

単位ベクトル

大きさが 1 のベクトルを **単位ベクトル** という。 $\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき, \vec{a} と平行な単位ベクトルは $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ と $-\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

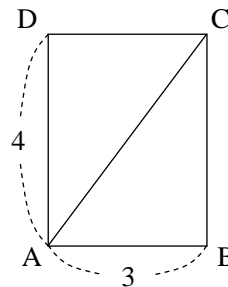
解答

$$AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$$

より, 求める単位ベクトルは

$$\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} = \frac{\vec{AB} + \vec{AD}}{5}, \quad -\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} = -\frac{\vec{AB} + \vec{AD}}{5}$$



5 ベクトルの成分, 大きさ

$\vec{a} = (4, -1)$, $\vec{b} = (3, -2)$ のとき, $-3\vec{a} + 2\vec{b}$ を成分で表せ。また, その大きさを求めよ。

要 点

ベクトルの成分表示

x 軸上の点 $E_1(1, 0)$ と y 軸上の $E_2(0, 1)$ に対して, 2 つの単位ベクトル $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$ を基本ベクトルという。

ベクトル \vec{a} に対して, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ となる点 A の座標を (a_1, a_2) とする。

点 A から x 軸, y 軸にそれぞれ垂線 AA_1 , AA_2 を引くと

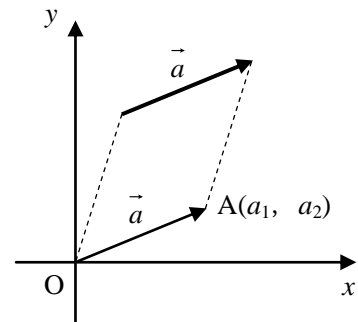
$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$$

$\overrightarrow{OA_1} = a_1\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OA_2} = a_2\vec{e}_2$ であるから, $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$ と表される。

このとき, 実数 a_1, a_2 を \vec{a} の成分といい, a_1 を x 成分, a_2 を y 成分

という。ベクトル \vec{a} を成分を用いて表すと, $\vec{a} = (a_1, a_2)$ となり,

このような表し方を, \vec{a} の成分表示 という。



ベクトルの相等

$\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ のとき $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1$ かつ $a_2 = b_2$

ベクトルの大きさ

$$\vec{a} = (a_1, a_2) \text{ のとき } |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

成分によるベクトルの演算

1 $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

2 $(a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$

3 $k(a_1, a_2) = (ka_1, ka_2)$ ただし, k は実数

解答

$$-3\vec{a} + 2\vec{b} = -3(4, -1) + 2(3, -2) = (-12, 3) + (6, -4) = (-6, -1)$$

$$|-3\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{(-6)^2 + (-1)^2} = \sqrt{37}$$

6 ベクトルの分解

$\vec{a} = (4, -1)$, $\vec{b} = (3, -2)$ のとき, $\vec{p} = (10, 0)$ を $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ の形で表せ。

要 点

2つのベクトル \vec{a} , \vec{b} が $\vec{0}$ でなく, 平行でないとする。すなわち, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ のとき, 任意のベクトル \vec{p} は

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} \quad \text{ただし, } s, t \text{ は実数}$$

の形に, ただ1通りに表される。

〈注意〉 2つのベクトル \vec{a} , \vec{b} が $\vec{0}$ でなく, 平行でないとき, \vec{a} と \vec{b} は **1次独立である** という。

解答

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} \text{ を成分で表すと } (10, 0) = s(4, -1) + t(3, -2) = (4s + 3t, -s - 2t)$$

$$\text{よって } \begin{cases} 10 = 4s + 3t \\ 0 = -s - 2t \end{cases} \quad \text{これを解いて } s = 4, t = -2$$

$$\text{したがって } \vec{p} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$$

7 座標とベクトルの成分, ベクトルの平行

次の問いに答えよ。

(1) 4点 $A(4, 1)$, $B(3, -2)$, $C(-2, 0)$, D を頂点とする平行四辺形 $ABCD$ がある。頂点 D の座標を求めよ。

(2) 2つのベクトル $\vec{a} = (4, 1)$, $\vec{b} = (3+t, -2+t)$ が平行になるように, t の値を定めよ。

要 点

(1) 四角形 $ABCD$ が平行四辺形になる条件に, 「1組の向かい合う辺が平行で等しい」がある。

すなわち **四角形 $ABCD$ が平行四辺形 $\Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{DC}$**

〈注意〉 点 D の座標が定まっていないとき, 平行四辺形 $ABCD$ は1通りしかないが, 4点 A, B, C, D を頂点とする平行四辺形は3通りある。

(2) **4** ベクトルの平行, 単位ベクトルでも扱った, 次の性質を利用する。

$$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \text{ のとき } \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = k\vec{a} \text{ となる実数 } k \text{ がある}$$

解答

(1) 頂点 D の座標を (x, y) とおく。

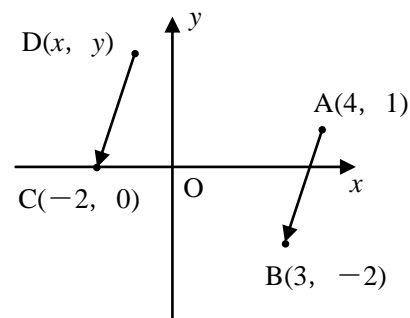
四角形 ABCD が平行四辺形であるから

$$\vec{AB} = \vec{DC}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで } \vec{AB} &= (3-4, -2-1) \\ &= (-1, -3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{DC} &= (-2-x, 0-y) \\ &= (-2-x, -y) \end{aligned}$$

2点 $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$ について
 $\vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$



$$\text{よって } \begin{cases} -1 = -2-x \\ -3 = -y \end{cases} \quad \text{これを解いて } x = -1, y = 3$$

したがって $D(-1, 3)$

(2) $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ で, $\vec{a} \parallel \vec{b}$ より, $\vec{b} = k\vec{a}$ となる実数 k があるから

$$(3+t, -2+t) = k(4, 1)$$

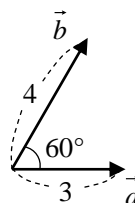
$$\text{よって } \begin{cases} 3+t=4k \\ -2+t=k \end{cases} \quad \text{これを解いて } k = \frac{5}{3}, t = \frac{11}{3}$$

したがって $t = \frac{11}{3}$

8 ベクトルの内積

次の内積を求めよ。

(1) $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4, \vec{a}$ と \vec{b} のなす角が 60° のときの, 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$



(2) $\vec{a}=(4, -1), \vec{b}=(3, -2)$ のときの, 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$

要 点

内積の定義

$$\vec{a}, \vec{b} \text{ のなす角を } \theta \text{ とするとき } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \quad \text{ただし } 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

〈注意〉 $\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときは, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ とする。

内積と成分

$$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2) \text{ のとき } \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

解答

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 3 \times 4 \times \frac{1}{2} = 6$$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \times 3 + (-1) \times (-2) = 14$$

9 ベクトルのなす角とベクトルの垂直

次の問いに答えよ。

- (1) 2つのベクトル $\vec{a}=(1, 4)$, $\vec{b}=(5, 3)$ のなす角 θ を求めよ。
 (2) $\vec{a}=(4, -1)$, $\vec{b}=(3+2x, -2+x)$ が垂直であるとき、 x の値を求めよ。

要 点

ベクトルのなす角

 $\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$ のなす角を θ とすると、次のことが成り立つ。

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \quad \text{ただし } 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

ベクトルの垂直条件

 $\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$ について、次のことが成り立つ。

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\text{すなわち } \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

解答

$$(1) \cos \theta = \frac{1 \times 5 + 4 \times 3}{\sqrt{1^2 + 4^2} \sqrt{5^2 + 3^2}} = \frac{17}{\sqrt{17} \sqrt{34}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 45^\circ$$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \times (3+2x) + (-1) \times (-2+x) = 7x + 14$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \text{ となるには, } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ となればよいので } 7x + 14 = 0 \quad \text{よって } x = -2$$

10 内積の性質の利用

次の問いに答えよ。

- (1) 等式 $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$ を証明せよ。
 (2) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{a} - \vec{b}|=\sqrt{13}$ のとき、 \vec{a} と \vec{b} のなす角 θ を求めよ。ただし、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。

要 点

内積の性質

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \text{ただし, } k \text{ は実数}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

〈注意〉これらは、 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$, $\vec{c}=(c_1, c_2)$ として計算することで確かめられる。

- (2) ベクトルの大きさは、2乗して考える。

解答

$$(1) \quad |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$(2) \quad |\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 3^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 4^2 = 25 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

これと、 $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{13}$ から $25 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 13$ よって $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$

したがって $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{6}{3 \cdot 4} = \frac{1}{2}$ $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから $\theta = 60^\circ$

11 三角形の面積

3点 O(0, 0), A(3, 1), B(-1, 2)を頂点とする三角形の面積 S を求めよ。

要 点

$\triangle OAB$ において、 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ とするとき、

$\triangle OAB$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

で表される。

証明 \vec{a} , \vec{b} のなす角を θ とすると、 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ より

$$\sin \theta > 0 \quad \text{よって} \quad \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

また、 $S = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$ より

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \theta)} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta)^2} \\ = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

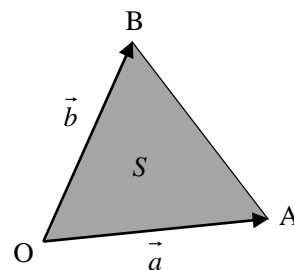
また、 $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ とすると

$$S = \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

で表される。

証明 $S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2}$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2} = \frac{1}{2} \sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} = \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$



解答

$\vec{OA} = (3, 1)$, $\vec{OB} = (-1, 2)$ であるから

$$S = \frac{1}{2} |3 \times 2 - 1 \times (-1)| = \frac{7}{2}$$

1 2 内分点, 外分点, 三角形の重心の位置ベクトル

- (1) 2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB に対して, 次の点の位置ベクトルを \vec{a} , \vec{b} を用いてそれぞれ表せ。
 ① 3 : 4 に内分する点 $P(\vec{p})$ ② 中点 $M(\vec{m})$ ③ 3 : 4 に外分する点 $Q(\vec{q})$
- (2) 3点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle ABC$ において, 辺 BC の中点を M とする。 $\triangle ABM$ の重心 $G(\vec{g})$ を, \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。

要 点

位置ベクトルとは・・・

平面上において1点 O を固定すると, 点 P の位置は $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ によって定まる。このとき, \vec{p} を点 O に関する点 P の **位置ベクトル** という。

ベクトルとは大きさ向きをもつもので, 平行移動して重なるものは同じベクトルと考えていた。

位置ベクトルは, 適当に点 O を定めることで, 点をベクトルと見なすという考え方である。

成分表示 $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$ は, 点 O に関する点 A の位置ベクトルともいえる。

内分点・外分点の位置ベクトル

2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を

1 $m : n$ に内分する点を $P(\vec{p})$ とすると
$$\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m + n}$$

特に, 点 P が線分 AB の中点であるとき
$$\vec{p} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

2 $m : n$ に外分する点を $Q(\vec{q})$ とすると
$$\vec{q} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m - n} = \frac{n\vec{a} - m\vec{b}}{-m + n}$$

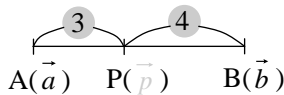
〈注意〉外分の公式は, m, n の小さい方にマイナスを付けて内分の公式に代入すればよい。

三角形の重心の位置ベクトル

3点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle ABC$ の重心 G の位置ベクトル \vec{g} は
$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

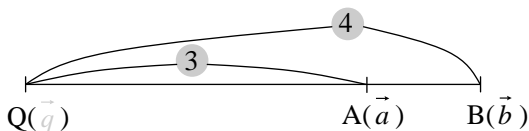
解答

(1) ①
$$\vec{p} = \frac{4\vec{a} + 3\vec{b}}{3 + 4} = \frac{4\vec{a} + 3\vec{b}}{7}$$



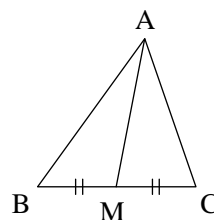
②
$$\vec{m} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

③
$$\vec{q} = \frac{4\vec{a} - 3\vec{b}}{-3 + 4} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$$



(2) 点 $M(\vec{m})$ とすると
$$\vec{m} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$$

よって, $\triangle ABM$ の重心 $G(\vec{g})$ は
$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}}{3} = \frac{2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}}{6}$$



1 3 3 点が一直線上にある条件

平行四辺形 ABCD において、辺 BC を 4 : 3 に内分する点を P、対角線 BD を 4 : 7 に内分する点を Q とするとき、3 点 A, Q, P は一直線上にあることを証明せよ。

要 点

3 点 A, B, C が一直線上にある $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ となる定数 k がある

証明

$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とすると

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$$

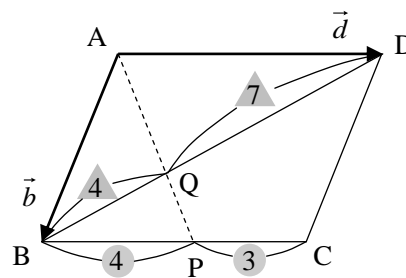
$$= \vec{b} + \frac{4}{7}\vec{d}$$

$$= \frac{7\vec{b} + 4\vec{d}}{7}$$

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{7\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AD}}{4+7} = \frac{7\vec{b} + 4\vec{d}}{11}$$

よって $\overrightarrow{AQ} = \frac{7}{11}\overrightarrow{AP}$

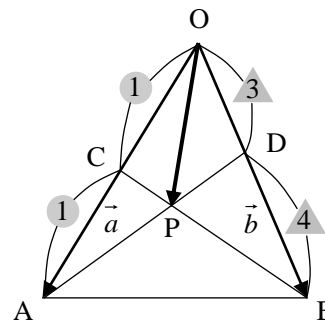
したがって、3 点 A, Q, P は一直線上にある。



1 4 交点の位置ベクトル

$\triangle OAB$ において、辺 OA の中点を C、辺 OB を 3 : 4 に内分する点を D とし、線分 AD と BC の交点を P とする。

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき、 \overrightarrow{OP} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。



要 点

\overrightarrow{OP} を 2 通りに表す。

- $\triangle OAD$ において、点 P は $AP : PD = s : (1-s)$ に内分しているとみる。
- $\triangle OBC$ において、点 P は $BP : PC = t : (1-t)$ に内分しているとみる。

解答

点 P は線分 AD 上にあるから、実数 s を用いて $AP : PD = s : (1-s)$

$$\text{とすると } \vec{OP} = s\vec{OD} + (1-s)\vec{OA} = (1-s)\vec{a} + \frac{3}{7}s\vec{b} \quad \dots\dots①$$

また、点 P は線分 BC 上にあるから、実数 t を用いて $BP : PC = t : (1-t)$

$$\text{とすると } \vec{OP} = (1-t)\vec{OB} + t\vec{OC} = \frac{1}{2}t\vec{a} + (1-t)\vec{b} \quad \dots\dots②$$

$$\text{①, ②から } (1-s)\vec{a} + \frac{3}{7}s\vec{b} = \frac{1}{2}t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$$

$$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \nparallel \vec{b} \text{ であるから } \begin{cases} 1-s = \frac{1}{2}t \\ \frac{3}{7}s = 1-t \end{cases}$$

6 ベクトルの分解 で、ベクトルの表し方は 1 通りであることを学習している。

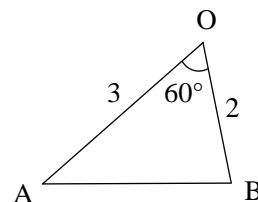
$$\text{これを解くと } s = \frac{7}{11}, t = \frac{8}{11} \quad \text{したがって } \vec{OP} = \frac{4}{11}\vec{a} + \frac{3}{11}\vec{b}$$

15 内積と図形の性質

$OA=3, OB=2, \angle AOB=60^\circ$ の $\triangle OAB$ がある。

次の問いに答えよ。

- (1) $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$ とするとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。
- (2) $\triangle OAB$ の垂心を H とするとき、 \vec{OH} を、 \vec{a}, \vec{b} を用いて表せ。



要 点

垂心は頂点から対辺へ引いた 3 本の垂線の交点であるから、 $\vec{OH} \perp \vec{AB}, \vec{AH} \perp \vec{OB}$ である。
よって、 $\vec{OH} \cdot \vec{AB} = 0, \vec{AH} \cdot \vec{OB} = 0$ であることを利用する。

解答

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle AOB = 3 \times 2 \times \cos 60^\circ = 3$$

$$(2) \vec{OH} \perp \vec{AB} \text{ から } \vec{OH} \cdot \vec{AB} = 0 \quad \text{ここで、実数 } s, t \text{ を用いて、} \vec{OH} = s\vec{a} + t\vec{b} \text{ とする。}$$

$$\text{このとき } \vec{OH} \cdot \vec{AB} = (s\vec{a} + t\vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = -s|\vec{a}|^2 + (s-t)\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 = -9s + 3(s-t) + 4t = -6s + t$$

$$\text{よって } -6s + t = 0 \quad \dots\dots①$$

$$\text{また、} \vec{AH} \perp \vec{OB} \text{ から } \vec{AH} \cdot \vec{OB} = 0$$

$$\text{よって } \vec{AH} \cdot \vec{OB} = (\vec{OH} - \vec{OA}) \cdot \vec{OB} = \{(s\vec{a} + t\vec{b}) - \vec{a}\} \cdot \vec{b} = \{(s-1)\vec{a} + t\vec{b}\} \cdot \vec{b}$$

$$= (s-1)\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 = 3(s-1) + 4t = 3s - 3 + 4t$$

$$\text{したがって } 3s + 4t - 3 = 0 \quad \dots\dots②$$

$$\text{①, ②を連立させて解くと } s = \frac{1}{9}, t = \frac{2}{3} \quad \text{以上から } \vec{OH} = \frac{1}{9}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

解答

(1) 直線 l 上の任意の点を $P(x, y)$ とし、点 P の位置ベクトルを \vec{p} とすると、 $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{u}$ から

$$(x, y) = (2, 0) + t(4, -1) = (2+4t, -t) \quad \text{よって} \quad \begin{cases} x=4t+2 \\ y=-t \end{cases}$$

$$4t = x - 2 \text{ から } t = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} \quad \text{したがって、求める直線 } l \text{ の方程式は } y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

(2) 直線 l 上の任意の点を $P(x, y)$ とし、点 P の位置ベクトルを \vec{p} とすると、 $\vec{p} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$ から

$$(x, y) = (1-t)(4, -1) + t(3, -2) = (4(1-t) + 3t, -(1-t) - 2t) = (4-t, -1-t)$$

$$\text{よって } \begin{cases} x = -t + 4 \\ y = -t - 1 \end{cases} \quad \text{求める直線 } l \text{ の方程式は、} t \text{ を消去して } y = x - 5$$

(3) 直線 l 上の任意の点を $P(x, y)$ とし、点 P の位置ベクトルを \vec{p} とすると、 $\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$ から

$$(3, -2) \cdot ((x, y) - (0, 2)) = (3, -2) \cdot (x, y-2) = 3x - 2(y-2) = 3x - 2y + 4$$

よって、求める直線 l の方程式は $3x - 2y + 4 = 0$

〈注意〉点 A の座標を (x_1, y_1) 、点 P の座標を (x, y) 、 $\vec{n} = (a, b)$ とすると、 $\vec{p} - \vec{a} = (x - x_1, y - y_1)$ から

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

となる。これを本問に用いると $3(x-0) - 2(y-2) = 0$ よって $3x - 2y + 4 = 0$

(4) ① 中心の位置ベクトルは $2\vec{a}$ 、半径は 3

$$\text{② } |2\vec{p} + \vec{a}| = 2 \text{ を変形すると } \left| \vec{p} - \left(-\frac{1}{2}\vec{a}\right) \right| = 1$$

よって、中心の位置ベクトルは $-\frac{1}{2}\vec{a}$ 、半径は 1

17 平面上の点の存在範囲

$\triangle OAB$ に対して、 $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ とする。実数 s, t が次の条件を満たしながら動くとき、点 P の存在範囲を求めよ。

(1) $2s + t = 2, s \geq 0, t \geq 0$

(2) $2s + t \leq 2, s \geq 0, t \geq 0$

要 点

① 点 P が線分 AB 上にある

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \quad s+t=1, s \geq 0, t \geq 0$$

② 点 P が $\triangle OAB$ の周上および内部にある

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \quad s+t \leq 1, s \geq 0, t \geq 0$$

解答

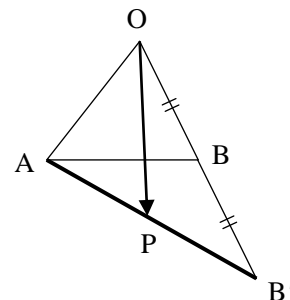
(1) $2s+t=2$ より $s+\frac{t}{2}=1$

$$\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB} = s\vec{OA} + \frac{t}{2}(2\vec{OB})$$

ここで, $s=s'$, $\frac{t}{2}=t'$ とおくと

$$\vec{OP} = s'\vec{OA} + t'(2\vec{OB}) \quad s'+t'=1, s' \geq 0, t' \geq 0$$

したがって, $2\vec{OB} = \vec{OB}'$ となるような点 B' をとると, 点 P の存在範囲は線分 AB' である。



(2) $2s+t \leq 2$ より $s+\frac{t}{2} \leq 1$

$$\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB} = s\vec{OA} + \frac{t}{2}(2\vec{OB})$$

ここで, $s=s'$, $\frac{t}{2}=t'$ とおくと

$$\vec{OP} = s'\vec{OA} + t'(2\vec{OB}) \quad s'+t' \leq 1, s' \geq 0, t' \geq 0$$

したがって, $2\vec{OB} = \vec{OB}'$ となるような点 B' をとると, 点 P の存在範囲は $\triangle OAB'$ の周上および内部である。

