極限

1　数列とその極限

(1)　一般項 a_n が次の式で表される数列$\{a_n\}$の極限を求めよ。

①　$\dfrac{2}{n}$　　②　$\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$　　③　n^2　　④　$-2n$

(2)　一般項 a_n が次の式で表される数列$\{a_n\}$の収束，発散について調べよ。

①　$(-2)^n$　　②　-2^n　　③　$\sin 2n\pi$　　④　$\cos n\pi$

要　点

数列の収束

数列$\{a_n\}$において，n を限りなく大きくすると，a_n の値が一定の値 α に限りなく近づくならば，数列$\{a_n\}$は α に **収束** するといい，α を数列$\{a_n\}$の **極限値**（または **極限**）という。

このことは，次のように表される。

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \qquad \text{または} \quad n\to\infty \text{のとき} \quad a_n \to \alpha$$

〈注意〉記号∞は「無限大（むげんだい）」と読む。

数列の発散

数列$\{a_n\}$が収束しないとき，$\{a_n\}$は **発散** するという。

・数列$\{a_n\}$において，n を限りなく大きくすると，a_n が限りなく大きくなる場合，数列$\{a_n\}$は **正の無限大に発散する**，または$\{a_n\}$の **極限は正の無限大である** という。
このことは，次のように表される。

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \qquad \text{または} \quad n\to\infty \text{のとき} \quad a_n \to \infty$$

・数列$\{a_n\}$において，n を限りなく大きくすると，a_n の値が負でその絶対値が限りなく大きくなる場合，数列$\{a_n\}$は **負の無限大に発散する**，または$\{a_n\}$の **極限は負の無限大である** という。
このことは，次のように表される。

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad \text{または} \quad n\to\infty \text{のとき} \quad a_n \to -\infty$$

・数列 1，－1，1，－1，……，$(-1)^{n-1}$ のように，収束しないが正の無限大にも負の無限大にも発散しないものもある。このような数列は **振動** するという。

数列 $\{a_n\}$ の収束・発散

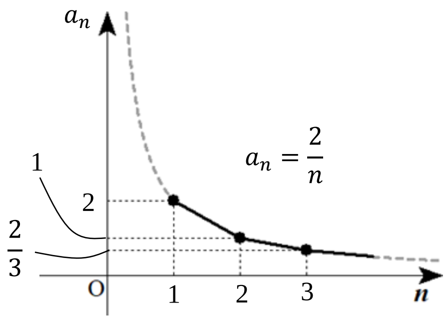
1　収束する	極限値 α をもつ………… $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$		極限がある
2　発散する	正の無限大に発散する…… $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$		極限がある
	負の無限大に発散する…… $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$		極限がある
	振動する		極限がない

解答

(1) ① 数列 $2,\ 1,\ \dfrac{2}{3},\ \cdots\cdots,\ \dfrac{2}{n},\ \cdots\cdots$

において，n を限りなく大きくすると，$\dfrac{2}{n}$ の値は限りなく 0 に近づく。

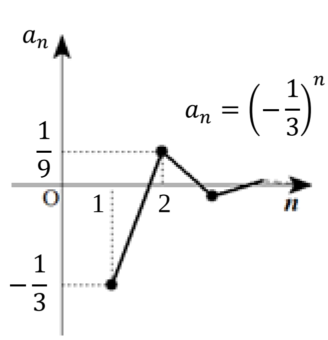
よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=\mathbf{0}$



② 数列 $-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{9},\ -\dfrac{1}{27},\ \cdots\cdots,\ \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n,\ \cdots\cdots$

において，n を限りなく大きくすると，$\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ の値は限りなく 0 に近づく。

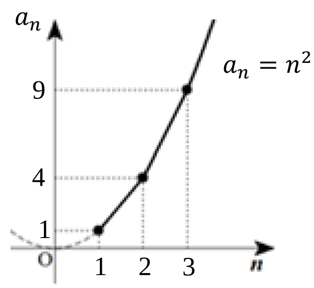
よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\mathbf{0}$



③ 数列 $1,\ 4,\ 9,\ \cdots\cdots,\ n^2,\ \cdots\cdots$

において，n を限りなく大きくすると，n^2の値は限りなく大きくなる。

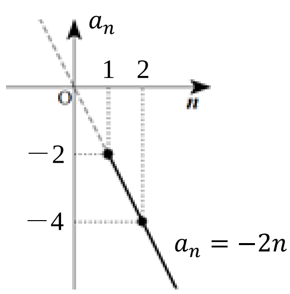
よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2=\infty$



④ 数列 $-2,\ -4,\ -6,\ \cdots\cdots,\ -2n,\ \cdots\cdots$

において，n を限りなく大きくすると，$-2n$の値は負でその絶対値が限りなく大きくなる。

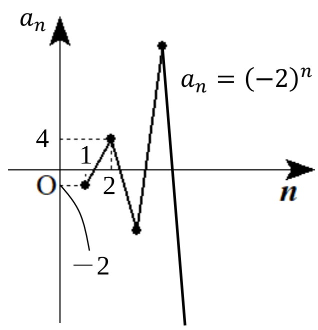
よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-2n)=-\infty$



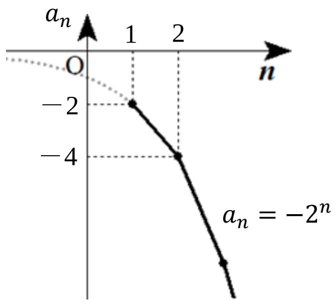
(2) ① 数列 $-2,\ 4,\ -8,\ \cdots\cdots,\ (-2)^n,\ \cdots\cdots$

において，n を限りなく大きくすると，$(-2)^n$の絶対値は限りなく大きくなるが，その符号は交互に変わり，正の無限大にも負の無限大にも発散しない。

よって，**振動** する。



② 数列-2，-4，-8，……，-2^n，……
において，n を限りなく大きくする
と，-2^nの値は負でその絶対値が限りなく
大きくなる。
よって，**負の無限大に発散** する。



③ $\sin 2\pi=0$，$\sin 4\pi=0$，……
であるから，数列$\{\sin 2n\pi\}$はすべての項が 0 の数列である。
よって，この数列は **収束し，極限値は 0**

④ $\cos \pi=-1$，$\cos 2\pi=1$，$\cos 3\pi=-1$，……
であるから，数列$\{\cos n\pi\}$は-1 と 1 が交互に現れる数列である。よって，n を限りなく大きくしても一定の値に収束せず，正の無限大にも負の無限大にも発散しない。
したがって，**振動** する。

2 数列の極限の性質

(1) 次の極限を求めよ。

① $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n-4}{n+2}$　② $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{3n^3+2}$　③ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2+n}$

④ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n^2-5n\sqrt{n}\right)$　⑤ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+3n}\right)$

(2) 極限$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{n}{2}\pi}{n}$を求めよ。

要　点

数列の極限値の性質

数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$は収束し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$となるとき，次のことが成り立つ。

1 $\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}ka_n=k\alpha}$　ただし，$\boldsymbol{k}$は定数

2 $\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta}$，$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta}$

3 $\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\alpha\beta}$

4 $\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha}{\beta}}$　ただし，$\boldsymbol{\beta\neq 0}$

数列の大小関係と極限

$\boxed{1}$ **すべての$\boldsymbol{n}$に対して$\boldsymbol{a_n \leqq b_n}$のとき，$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha}$，$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} b_n = \beta}$ ならば　$\boldsymbol{\alpha \leqq \beta}$**

$\boxed{2}$ **すべての$\boldsymbol{n}$に対して$\boldsymbol{a_n \leqq c_n \leqq b_n}$のとき，$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha}$ ならば　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha}$**

$\boxed{3}$ **すべての$\boldsymbol{n}$に対して$\boldsymbol{a_n \leqq b_n}$のとき，$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = \infty}$ ならば　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} b_n = \infty}$**

〈注意〉$\boxed{1}$　すべてのnに対して$a_n < b_n$であっても，$\alpha < \beta$であるとは限らない。

例えば，$a_n = \dfrac{1}{n+1}$，$b_n = \dfrac{1}{n}$とすると，$a_n < b_n$であるが　$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$\boxed{2}$を，**はさみうちの原理** という。

解答

(1)　①　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n-4}{n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{4}{n}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{3}{1} = \mathbf{3}$

数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$において，分数形$\dfrac{a_n}{b_n}$の極限を求めようとするとき，a_n，b_nがともに発散したり，$b_n \to 0$ となったりする場合には求められない。このような場合は，b_nが 0 でない極限値をもつように分数を変形するとよい。

②　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{3n^3+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{3+\frac{2}{n^3}} = \frac{0}{3} = \mathbf{0}$

分母が 0 でない極限値をもつように，n^3で分母，分子を割る。

③　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = \infty$

分母が 0 でない極限値をもつように，n^2で分母，分子を割る。

④　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n^2-5n\sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{5}{\sqrt{n}}\right) = \infty$

数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$において，$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$のとき，$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$は **不定形の極限** とよばれ，このままでは極限を求めることができない。$\left((1)\ ①\sim③\ の\ \lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}\ も不定形の極限\right)$
そのため，④や⑤のような変形をして極限を求める。

⑤　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+3n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(n-\sqrt{n^2+3n}\right)\left(n+\sqrt{n^2+3n}\right)}{n+\sqrt{n^2+3n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-(n^2+3n)}{n+\sqrt{n^2+3n}}$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\frac{-3n}{n+\sqrt{n^2+3n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-3}{1+\sqrt{1+\frac{3}{n}}} = \frac{-3}{1+1} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

(2)　$-1 \leqq \sin\dfrac{n}{2}\pi \leqq 1$ であり，各辺を自然数nで割ると　$-\dfrac{1}{n} \leqq \dfrac{\sin\frac{n}{2}\pi}{n} \leqq \dfrac{1}{n}$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{n}{2}\pi}{n}=\mathbf{0}$

$\boxed{3}$　**無限等比数列の極限**

(1)　次の極限を求めよ。

①　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$　　②　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n$　　③　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n+1}$　　④　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{3^n+4^n}$

(2)　第n項が$\dfrac{2r^n}{1+r^{n+1}}$で表される数列の極限を調べよ。ただし，$r \neq -1$ とする。

要　点

数列 $\{r^n\}$ の極限

$\boxed{1}$　$\boldsymbol{r>1}$**のとき**　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{r^n}=\infty$

$\boxed{2}$　$\boldsymbol{r=1}$**のとき**　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{r^n}=\mathbf{1}$

$\boxed{3}$　$\boldsymbol{|r|<1}$**のとき**　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{r^n}=\mathbf{0}$

（2, 3）**$-1<r\leqq 1$ のとき，数列$\{r^n\}$は収束する**

$\boxed{4}$　$\boldsymbol{r\leqq -1}$**のとき　振動する。　（極限はない）**

$\boxed{\text{証明}}$　$\boxed{1}$　<u>$r>1$ のとき</u>

$h>0$ として，$r=1+h$ とおくと，二項定理から

$$r^n=(1+h)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1h+{}_n\mathrm{C}_2h^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nh^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots\cdots+h^n$$

よって，n が 2 以上の自然数のとき，$(1+h)^n>1+nh$ が成り立つ。ここで，$h>0$ であるから

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+nh)=\infty$　　したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+h)^n=\infty$　　すなわち　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$

$\boxed{2}$　<u>$r=1$ のとき</u>　nの値に関係なく$r^n=1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=1$

$\boxed{3}$　<u>$|r|<1$ のとき</u>　$r=0$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=0$

$r\neq 0$ のとき，$|r|=\dfrac{1}{s}$とおくと，$s>1$ であるから$\boxed{1}$より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}s^n=\infty$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|r^n|=\lim_{n\to\infty}|r|^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s^n}=0$　　$-|r|\leqq r\leqq |r|$であることから

$\displaystyle-\lim_{n\to\infty}|r|^n\leqq\lim_{n\to\infty}r^n\leqq\lim_{n\to\infty}|r|^n$　　$\displaystyle-\lim_{n\to\infty}|r|^n=\lim_{n\to\infty}|r|^n=0$ より　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=0$

$\boxed{4}$　$r \leqq -1$ のとき

$r=-1$ のとき，数列$\{r^n\}$は　$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots\cdots$　となり，振動する。

$r<-1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}|r^n|=\infty$であるが，項の符号は交互に正負が入れかわる。

よって，振動する。

解答

(1)　①　$\frac{\sqrt{3}}{2}<1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n=\mathbf{0}$

②　$\frac{\sqrt{5}}{2}>1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n=\infty$

③　$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\mathbf{2}$

分母が0でない極限値をもつように，2^nで分母，分子を割る。

④　$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{3^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}=\infty$

分母が0でない極限値をもつように，4^nで分母，分子を割る。

(2)　(i)　$r>1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\frac{2r^n}{1+r^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(\frac{1}{r}\right)^n+r}=\frac{2}{0+r}=\frac{2}{r}$

(ii)　$r=1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}r^n=1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\frac{2r^n}{1+r^{n+1}}=\frac{2}{1+1}=1$

(iii)　$|r|<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}r^n=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\frac{2r^n}{1+r^{n+1}}=\frac{0}{1+0}=0$

(iv)　$r<-1$ のとき，$\left|\frac{1}{r}\right|<1$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$

よって　$\lim_{n\to\infty}\frac{2r^n}{1+r^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(\frac{1}{r}\right)^n+r}=\frac{2}{0+r}=\frac{2}{r}$

以上より，$r\neq-1$ のときこの数列は収束し，その極限値は

$|r|>1$ のとき　$\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{r}}$,

$r=1$のとき　1,

$|r|<1$ のとき　0

$\boxed{4}$ **無限級数**

(1) 次の無限級数の収束，発散について調べ，収束するときはその和を求めよ。

① $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$　　② $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

(2) 次の無限等比級数の収束，発散について調べ，収束するときはその和を求めよ。

① $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$　　② $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$

(3) 循環小数 $3.\dot{1}\dot{4}$を分数になおせ。

要　点

項が限りなく続く数列 a_1，a_2，a_3，……，a_n，……を **無限数列** という。

無限数列$\{a_n\}$の各項を順に記号＋（プラス）で結んだ式

$\boldsymbol{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots}$　　……①

を **無限級数** といい，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{a_n}$ と書くこともある。

無限級数①の a_1 を **初項**，a_n を **第 n 項** といい，数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$ を，無限級数①の第 n 項までの **部分和** という。

無限級数①の第n項までの部分和が作る数列$\{S_n\}$がある値Sに収束するとき，すなわち，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=S$であるとき，無限級数①は S に **収束する** といい，S を無限級数①の **和** という。

また，数列$\{S_n\}$が発散するとき，無限級数①は **発散する** という。

無限等比級数の収束・発散

初項 a，公比 r の無限等比数列$\{ar^{n-1}\}$から作られる無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots}\qquad\cdots\cdots①$$

を初項 a，公比 r の **無限等比級数** という。無限等比級数①の部分和を S_n とすると，

$r\neq1$ のとき　$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a}{1-r}-\dfrac{ar^n}{1-r}$

$r=1$ のとき　$S_n=na$

(i) <u>$a=0$ のとき</u>　$S_n=0$ であるから，無限等比級数①は収束して，その和は 0

(ii) <u>$a\neq0$，$r=1$ のとき</u>　$S_n=na$ であり，数列$\{S_n\}$は発散するから，無限等比級数①は発散する。

(iii) <u>$a\neq0$，$|r|<1$ のとき</u>　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a}{1-r}-\frac{a\cdot0}{1-r}=\frac{a}{1-r}$

よって，無限等比級数①は収束し，その和は$\dfrac{a}{1-r}$

(iv) <u>$a\neq0$，$r\leqq-1$ または $r>1$ のとき</u>　数列$\{r^n\}$は発散するから，数列$\{S_n\}$も発散する。

よって，無限等比級数①は発散する。

以上をまとめると，次のようになる。

無限等比級数 $a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots$ は

・$\boldsymbol{a \neq 0}$**のとき，**$|r|<1$ **ならば収束し，その和は**$\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{1-r}}$　　$|r| \geqq 1$**ならば発散する。**

・$\boldsymbol{a=0}$ **のとき，収束し，その和は 0**

(3)　循環小数は，無限等比級数の和として計算でき，分数になおすことができる。

解答

(1)　①　$\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+1}=\dfrac{a(n+1)+bn}{n(n+1)}=\dfrac{(a+b)n+a}{n(n+1)}$

$\begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases}$ を満たすのは，$a=1$，$b=-1$ であるから　$\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ と変形できる。

無限級数の第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$　　したがって，この無限級数は **収束し，その和は 1**

②　$\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)}=\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-(n+1)}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

と変形できる。無限級数の第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\cdots\cdots+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

$$=-1+\sqrt{n+1}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(-1+\sqrt{n+1}\right)=\infty$　　したがって，この無限級数は **発散** する。

(2)　①　初項は 1，公比は$r=\sqrt{2}$で$|r| \geqq 1$ であるから，この無限等比級数は **発散** する。

②　初項は -1，公比は$r=-\dfrac{1}{2}$で$|r|<1$ であるから，この無限等比級数は **収束** する。

その和は　$\dfrac{-1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=-\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

(3)　$3.\dot{1}\dot{4}=3.141414\cdots\cdots=3+\underline{0.14+0.0014+0.000014+\cdots\cdots}$

下線部は，初項 0.14，公比 0.01 の無限等比級数である。公比の絶対値が 1 より小さいから，

この無限等比級数は収束する。よって　$3.\dot{1}\dot{4}=3+\dfrac{0.14}{1-0.01}=3+\dfrac{14}{100-1}=\boldsymbol{\dfrac{311}{99}}$

$\boxed{5}$　**無限級数の性質**

(1)　無限級数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{2}{3^n}\right)$の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(2)　無限級数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$は発散することを示せ。

要　点

数列$\{a_n\}$の無限級数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$は，部分和が作る数列$\{S_n\}$の極限$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$で定義された。

よって，数列の極限値の性質から，次の性質が導かれる。

無限級数の性質(1)

無限級数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$がともに収束し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n=T$ ならば

$\boxed{1}$　$\displaystyle\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty}ka_n=kS}$　　**ただし，$\boldsymbol{k}$は定数**

$\boxed{2}$　$\displaystyle\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=S+T,\quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=S-T}$

また，無限級数の収束，発散に関して，次のことが成り立つ。

無限級数の性質(2)

$\boxed{1}$　**$\displaystyle\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty}a_n}$が収束するならば，$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}a_n=0}$である。**

$\boxed{2}$　**数列$\boldsymbol{\{a_n\}}$が$\boldsymbol{0}$に収束しないとき，$\displaystyle\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty}a_n}$は発散する。**

無限級数の性質(2)は，次のようにして示すことができる。

無限級数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$の第$n$項までの部分和を$S_n$とすると　　**$\boldsymbol{n\geqq 2}$のとき　$\boldsymbol{a_n=S_n-S_{n-1}}$**

であるから，この無限級数が収束するとき，その和をSとすれば

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0$$

よって，$\boxed{1}$の「$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$が収束するならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$である」ことが成り立つ。また，この対偶を考えると，$\boxed{2}$の「数列$\{a_n\}$が0に収束しないとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$は発散する」が成り立つ。

解答

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$は初項$\dfrac{1}{2}$，公比$\dfrac{1}{2}$の無限等比級数であり，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}$は初項$\dfrac{2}{3}$，公比$\dfrac{1}{3}$の無限等比級数である。

公比の絶対値がともに 1 より小さいから，2 つの無限等比級数は収束する。

したがって，与えられた無限級数も **収束** し，その **和は**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{2}{3^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1-1=\mathbf{0}$$

(2) 数列$\{(-1)^{n-1}\}$は　1，－1，1，－1，……　　であるから，振動する。

よって，数列$\{(-1)^{n-1}\}$が 0 に収束しないから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$は発散する。

> 無限級数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$は発散する。次のように(　)を付けて「収束する」としてはいけない。
>
> 誤答例
>
> ・$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1-1+1-1+\cdots\cdots=(1-1)+(1-1)+\cdots\cdots=0+0+\cdots\cdots=0$
>
> ・$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1-1+1-1+1-\cdots\cdots=1-(1-1)-(1-1)-\cdots\cdots=1-0-0-\cdots\cdots=1$

6　関数の極限

(1) 次の極限値を求めよ。

① $\displaystyle\lim_{x\to-2}(x^2-3)$　　② $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-1}$　　③ $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$

(2) 等式$\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{a\sqrt{x+1}+b}{x-3}=2$が成り立つように，定数$a$，$b$の値を定めよ。

(3) 次の極限を求めよ。

① $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}$　　② $\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{x^2-1}{|x-1|}$

(4) 次の極限は存在するか。存在すればその極限を求めよ。

① $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{|x^2-4|}{x-2}$　　② $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{1}{(x+1)^2}$

(5) 次の極限を求めよ。

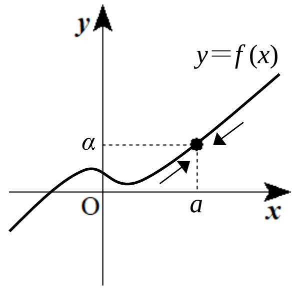
① $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x^3+3x^2)$　　② $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x}{x^2-2}$

③ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3}-x\right)$　　④ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)$

要　点

関数の極限

関数 $f(x)$において，変数 x が a と異なる値をとりながら
a に限りなく近づくとき，それに応じて $f(x)$の値が
一定の値 α に限りなく近づく場合



$$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha \quad \text{または} \quad x\to a\text{のとき}f(x)\to\alpha$$

と表し，この値 α を $x\longrightarrow a$ のときの関数 $f(x)$の **極限値**
または **極限** という。また，このとき $f(x)$は α に **収束する** という。

関数の極限値の性質

α，βを定数とし，$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$，$\lim_{x\to a} g(x)=\beta$のとき，次のことが成り立つ。

$\boxed{1}$ $\displaystyle\lim_{x\to a} kf(x)=k\alpha$　　**ただし，kは定数**

$\boxed{2}$ $\displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha+\beta$，$\displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\alpha-\beta$

$\boxed{3}$ $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\alpha\beta$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$　　**ただし，$\beta\neq 0$**

〈注意〉上の性質は $x\longrightarrow a$ を $x\longrightarrow\infty$，$x\longrightarrow-\infty$としても成り立つ。

(2)　関数の極限値の性質$\boxed{3}$から，a，α が定数のとき

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha \quad \text{かつ} \quad \lim_{x\to a} g(x)=0\text{ならば} \qquad \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)=\alpha\cdot 0=0$$

(3)　関数 $f(x)$において，$x\longrightarrow a$ のとき，$f(x)$の値が正で限りなく大きくなるならば，
$f(x)$は **正の無限大に発散する**，または $f(x)$の **極限は正の無限大である** といい，次のように表す。

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \quad \text{または} \quad x\to a\text{のとき}f(x)\to\infty$$

また，$x\longrightarrow a$ のとき，$f(x)$の値が負でその絶対値が限りなく大きくなるならば，
$f(x)$は **負の無限大に発散する**，または $f(x)$の **極限は負の無限大である** といい，次のように表す。

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty \quad \text{または} \quad x\to a\text{のとき}f(x)\to-\infty$$

〈注意〉上のことは，$x\longrightarrow a$ を $x\longrightarrow\infty$，$x\longrightarrow-\infty$としても同様である。

関数の片側からの極限

・右側極限

x が a より大きい値をとりながら限りなく a に近づくことを $\boldsymbol{x\longrightarrow a+0}$ と表す。

このときの関数$f(x)$の極限を **右側極限** といい，$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)$ と表す。

・左側極限

x が a より小さい値をとりながら限りなく a に近づくことを $\boldsymbol{x \longrightarrow a-0}$ と表す。

このときの関数$f(x)$の極限を **左側極限** といい，$\displaystyle \lim_{x \to a-0} f(x)$ と表す。

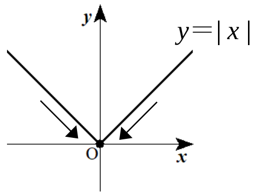
〈注意〉特に $a=0$ の場合には，$x \longrightarrow 0+0$，$x \longrightarrow 0-0$ を，それぞれ $\boldsymbol{x \longrightarrow +0}$，$\boldsymbol{x \longrightarrow -0}$ と表す。

関数の極限が存在する場合，存在しない場合

<u>**右側極限と左側極限が存在して一致するとき，極限が存在する。**</u>

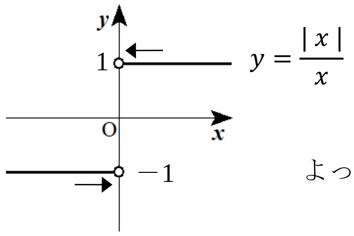
すなわち，α を定数，あるいは∞，$-\infty$とするとき，次のことが成り立つ。

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha \iff \lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$



$$\lim_{x \to +0} |x| = \lim_{x \to -0} |x| = 0$$
$$\iff \lim_{x \to 0} |x| = 0$$

$\displaystyle \lim_{x \to a+0} f(x) \neq \lim_{x \to a-0} f(x)$ のとき，$x \to a$のときの関数$f(x)$の極限は存在しない。



$\displaystyle \lim_{x \to +0} \frac{|x|}{x} = 1$，$\displaystyle \lim_{x \to -0} \frac{|x|}{x} = -1$ より

$$\lim_{x \to +0} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x \to -0} \frac{|x|}{x}$$

よって，$x \to 0$ のときの関数$\dfrac{|x|}{x}$の極限は存在しない。

関数の極限についてまとめると，次のようになる。

一定の値に近づく（収束する）……極限値をもつ

∞に発散

$-\infty$に発散

極限値はない

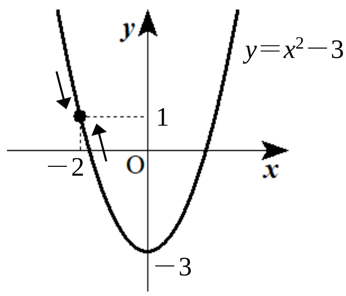
極限がある

極限はない

極限がない

解答

(1)　①　$\displaystyle \lim_{x \to -2} (x^2 - 3) = \mathbf{1}$



② $\lim_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

> 関数$f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$の定義域は$x\neq\pm1$なので，$f(1)$は定義されないが，
>
> $\lim_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\dfrac{3}{2}$であり，極限は考えることができる。

③ $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}{x(\sqrt{x+9}+3)}=\lim_{x\to0}\dfrac{(x+9)-9}{x(\sqrt{x+9}+3)}=\lim_{x\to0}\dfrac{x}{x(\sqrt{x+9}+3)}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{x+9}+3}=\dfrac{1}{3+3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$

(2) $\lim_{x\to3}\dfrac{a\sqrt{x+1}+b}{x-3}=2$ かつ $\lim_{x\to3}(x-3)=0$ であるから，$\lim_{x\to3}(a\sqrt{x+1}+b)=0$ である。

よって $\lim_{x\to3}(a\sqrt{x+1}+b)=2a+b=0$ ……①

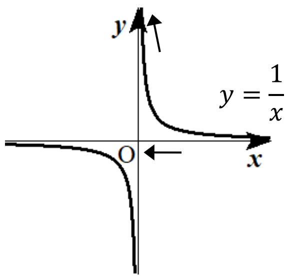
これから $b=-2a$ これを，与えられた等式の左辺に代入すると

$\lim_{x\to3}\dfrac{a\sqrt{x+1}-2a}{x-3}=\lim_{x\to3}\dfrac{a(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to3}\dfrac{a\{(x+1)-4\}}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$

$=\lim_{x\to3}\dfrac{a(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to3}\dfrac{a}{\sqrt{x+1}+2}=\dfrac{a}{2+2}=\dfrac{a}{4}$

よって $\dfrac{a}{4}=2$ ……② ①，②から $\boldsymbol{a=8,\ b=-16}$

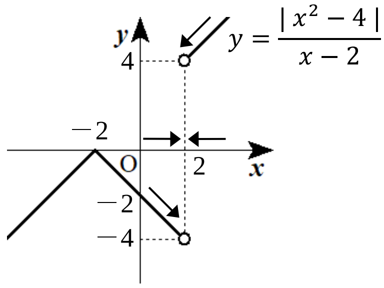
(3) ① $\lim_{x\to+0}\dfrac{1}{x}=\infty$



② $x<1$ のとき，$\dfrac{x^2-1}{|x-1|}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)}=-x-1$ であるから

$\lim_{x\to1-0}\dfrac{x^2-1}{|x-1|}=\lim_{x\to1-0}(-x-1)=\boldsymbol{-2}$

(4)　①　$x \leqq -2$，$2 \leqq x$のとき　$\dfrac{|x^2-4|}{x-2} = x+2$



$-2 < x < 2$ のとき　$\dfrac{|x^2-4|}{x-2} = -x-2$

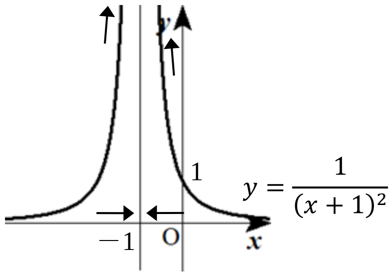
よって，$y = \dfrac{|x^2-4|}{x-2}$のグラフは右の図のようになる。これより，$\displaystyle\lim_{x\to 2+0}\frac{|x^2-4|}{x-2} = 4$，$\displaystyle\lim_{x\to 2-0}\frac{|x^2-4|}{x-2} = -4$ で，

$\displaystyle\lim_{x\to 2+0}\frac{|x^2-4|}{x-2} \neq \lim_{x\to 2-0}\frac{|x^2-4|}{x-2}$であるから，$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{|x^2-4|}{x-2}$は **存在しない。**

②　$\displaystyle\lim_{x\to -1+0}\frac{1}{(x+1)^2} = \infty$，

$\displaystyle\lim_{x\to -1-0}\frac{1}{(x+1)^2} = \infty$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x+1)^2} = \infty$



(5)　①　$\displaystyle\lim_{x\to -\infty}(x^3+3x^2) = \lim_{x\to -\infty}x^3\left(1+\frac{3}{x}\right) = -\infty$

数列の極限と同様，$-\infty+\infty$などのような不定形の極限とはならない形に変形する。 （「$\boxed{2}$　**数列の極限の性質**」(1)　参照）

②　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x}{x^2-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x}}{1-\frac{2}{x^2}} = \frac{1+0}{1-0} = \mathbf{1}$

③　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-3}-x\right)\left(\sqrt{x^2-3}+x\right)}{\sqrt{x^2-3}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-3)-x^2}{\sqrt{x^2-3}+x}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-3}{\sqrt{x^2-3}+x} = \mathbf{0}$$

④　$\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)$において，$x=-t$とおくと，$x \longrightarrow -\infty$のとき$t \longrightarrow \infty$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t^2-t}-t\right) = \lim_{t\to\infty}\frac{\left(\sqrt{t^2-t}-t\right)\left(\sqrt{t^2-t}+t\right)}{\sqrt{t^2-t}+t}$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-t)-t^2}{\sqrt{t^2-t}+t} = \lim_{t\to\infty}\frac{-t}{\sqrt{t^2-t}+t} = \lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{t}}+1} = \frac{-1}{1+1} = -\mathbf{\frac{1}{2}}$$

〈注意〉$x<0$ のとき，$\sqrt{x^2+x} = -x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$としなければならず，間違いやすい。

$x \longrightarrow -\infty$のときは，この解答のように$x=-t$とおき，$t \longrightarrow \infty$について考えるとよい。

$\boxed{7}$ **指数関数・対数関数・三角関数と極限**

(1) 次の極限値を求めよ。

① $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 2^x$　② $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-4^x}{2^x+3^x}$　③ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{1}{x}$

④ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\sin\frac{1}{x}$　⑤ $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0}\tan x$

(2) 次の極限値を求めよ。

① $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$　② $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}$

(3) 次の極限値を求めよ。

① $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$　② $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x}$　③ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

要　点

指数関数の極限

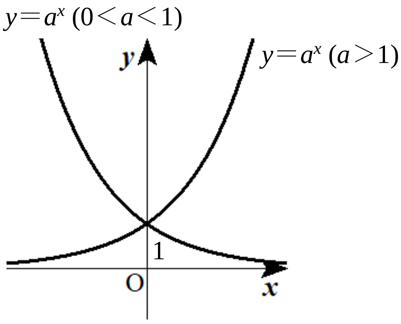
指数関数 $y=a^x$ の極限は，次のようになる。

$a>1$ のとき

$$\lim_{x\to\infty} a^x=\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} a^x=0$$

$0<a<1$ のとき

$$\lim_{x\to\infty} a^x=0,\quad \lim_{x\to-\infty} a^x=\infty$$



対数関数の極限

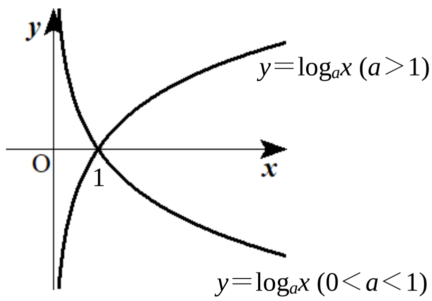
対数関数 $y=\log_a x$ の極限は，次のようになる。

$a>1$ のとき

$$\lim_{x\to+0}\log_a x=-\infty,\quad \lim_{x\to\infty}\log_a x=\infty$$

$0<a<1$ のとき

$$\lim_{x\to+0}\log_a x=\infty,\quad \lim_{x\to\infty}\log_a x=-\infty$$

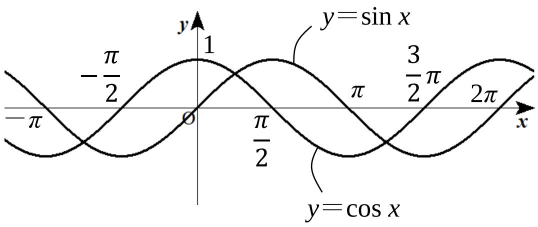


三角関数の極限

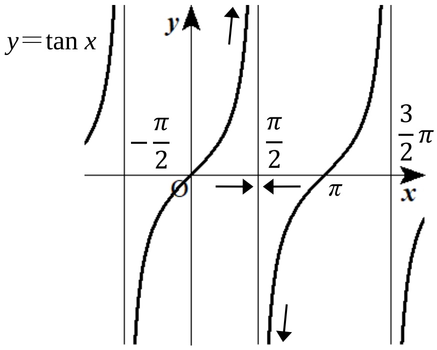
三角関数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ のグラフは右の図のようになり，$x\longrightarrow\infty$ や $x\longrightarrow-\infty$ のとき，無限大に発散したり，一定の値に近づいたりしない。

よって，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sin x$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\sin x$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\cos x$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\cos x$

は存在しない。



三角関数 $y=\tan x$ のグラフは右の図のようになる。



よって，$\lim_{x\to\infty}\tan x$，$\lim_{x\to-\infty}\tan x$ は存在しない。

また，$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\tan x=-\infty$，$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\tan x=\infty$

であるから，$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$ は存在しない。

関数の大小関係と極限

数列の場合と同様に，関数の極限にも次の性質がある。ただし，α，β は定数とする。

$\boxed{1}$ **aに近いxに対して，$f(x)\leqq g(x)$のとき，$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$，$\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ ならば　$\alpha\leqq\beta$**

$\boxed{2}$ **aに近いxに対して，$f(x)\leqq h(x)\leqq g(x)$のとき，$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\alpha$ ならば　$\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$**

$\boxed{3}$ **aに近いxに対して，$f(x)\leqq g(x)$のとき，$\lim_{x\to a}f(x)=\infty$ ならば　$\lim_{x\to a}g(x)=\infty$**

〈注意〉「a に近い x に対して」を「x の絶対値が十分大きいとき」と置き換えると，$x\longrightarrow\infty$，$x\longrightarrow-\infty$の場合成り立つ。また，$\boxed{2}$をはさみうちの原理という。

$x\to0$ のときの $\dfrac{\sin x}{x}$ の極限

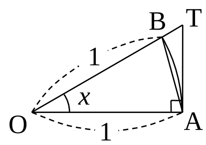
三角関数の極限に関して，次が成り立つ。　$\lim_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，　$\lim_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=1$

$\boxed{\text{証明}}$　(i)　$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

OA＝OB＝1，∠AOB＝x，弧 AB 上の点 A における接線と直線 OB との交点を T として，右の図のように

△OAB，扇形 OAB，△OAT

をかく。AT＝$\tan x$ であることから，これらの面積は次のように表される。



$$\triangle\text{OAB}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin x=\frac{1}{2}\sin x，\ \text{扇形 OAB}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot x=\frac{1}{2}x，\ \triangle\text{OAT}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\tan x=\frac{1}{2}\tan x$$

面積の大小関係について，△OAB＜扇形 OAB＜△OAT であるから

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x \qquad \text{すなわち} \quad \sin x<x<\tan x \quad \cdots\cdots①$$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$のとき，$\sin x>0$ であるから，①の各辺を $\sin x$ で割ると　$1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$

各辺の逆数をとると　$1>\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$

ここで，$\lim_{x\to+0}\cos x=1$ であるから，はさみうちの原理により　$\lim_{x\to+0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

(ii)　$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ のとき

$x=-t$とおくと，$-\dfrac{\pi}{2}<-t<0$ より　$0<t<\dfrac{\pi}{2}$　　よって，求める $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}$ の極限値は

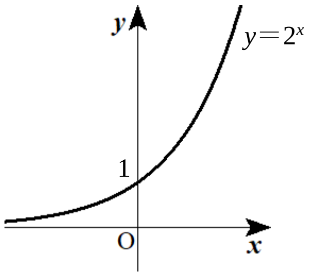
$$\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{t\to+0}\frac{\sin(-t)}{-t}=\lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t}=1$$

(i)，(ii)より，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=1$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

また　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1$

解答

(1)　①　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}2^x=\mathbf{0}$



②　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3^x-4^x}{2^x+3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\left(\frac{4}{3}\right)^x}{\left(\frac{2}{3}\right)^x+1}=-\infty$

③　$x\longrightarrow\infty$のとき，$\dfrac{1}{x}\longrightarrow+0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{1}{x}=-\infty$

④　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\sin\frac{1}{x}=\mathbf{0}$

⑤　$\displaystyle\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+0}\tan x=-\infty$

(2)　①　$x\longrightarrow\infty$を考えるので，$x>0$ としてよい。

$-1\leqq\sin x\leqq1$ であり，各辺をxで割ると　$-\dfrac{1}{x}\leqq\dfrac{\sin x}{x}\leqq\dfrac{1}{x}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\mathbf{0}$

②　(i)　$x>0$ のとき

$-1\leqq\cos\dfrac{1}{x}\leqq1$ であり，各辺にxを掛けると　$-x\leqq x\cos\dfrac{1}{x}\leqq x$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}(-x)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}x=0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to+0}x\cos\frac{1}{x}=0$

(ii)　$x<0$ のとき

$-1 \leqq \cos\frac{1}{x} \leqq 1$ であり，各辺にxを掛けると　$x \leqq x\cos\frac{1}{x} \leqq -x$

$\lim_{x\to-0} x = 0$，$\lim_{x\to-0}(-x) = 0$ であるから，はさみうちの原理により　$\lim_{x\to-0} x\cos\frac{1}{x} = 0$

(i)，(ii)より，$\lim_{x\to+0} x\cos\frac{1}{x} = \lim_{x\to-0} x\cos\frac{1}{x} = 0$ であるから　$\lim_{x\to0} x\cos\frac{1}{x} = \mathbf{0}$

(3)　①　$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} = 1\cdot1 = \mathbf{1}$

②　$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin 2x} = \lim_{x\to0}\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}\cdot1 = \mathbf{\frac{1}{2}}$

$\lim_{\square\to0}\frac{\sin\square}{\square} = 1$ を利用する場合，□はすべて同じにしなければいけない。$\lim_{\square\to0}\frac{\square}{\sin\square} = 1$ も同様。

③　$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$

$= \lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}$

$= 1^2\cdot\frac{1}{1+1} = \mathbf{\frac{1}{2}}$

$1-\cos^2 x=\sin^2 x$ を利用するため，分母・分子に $1+\cos x$ を掛ける。

8　**関数の連続性**

(1)　次の関数は，$x=0$ で連続か。

①　$f(x) = |x|$　　　②　$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

(2)　方程式$\sqrt{x} - \cos x = 0$ は区間$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$において，少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。

要　点

関数の連続性

関数$f(x)$において，その定義域内の$x = a$に対して　$\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x)}$ **が存在し，**$\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$

が成り立つとき，関数 $f(x)$は $x=a$ で **連続** であるという。

上の条件は，$\boldsymbol{\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a)}$　と書くこともできる。

aが定義域の左端または右端のときは，それぞれ

$\boldsymbol{\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)}$，$\boldsymbol{\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a)}$　が成り立てば，$f(x)$は$x = a$で連続であるという。

関数 $f(x)$が，定義域内の $x=a$ で連続でないとき，$f(x)$は $x=a$ で **不連続** であるという。

関数 $f(x)$，$g(x)$がともに $x=a$ で連続ならば

関数 $kf(x)$，$f(x)+g(x)$，$f(x)-g(x)$，$f(x)g(x)$　　ただし，k は定数

は，いずれも$x=a$で連続である。また，$g(a)\neq 0$ のとき，関数$\dfrac{f(x)}{g(x)}$も$x=a$で連続である。

区間で連続な関数

区間 $a\leqq x\leqq b$ を **閉区間**，区間 $a<x<b$ を **開区間** といい，それぞれ $[a,\ b]$，$(a,\ b)$ で表す。

また，区間 $a\leqq x<b$，$a<x\leqq b$，$a<x$，$x\leqq b$ を，それぞれ $[a,\ b)$，$(a,\ b]$，$(a,\ \infty)$，$(-\infty,\ b]$ で表す。

実数全体を$(-\infty,\ \infty)$と表すこともある。

関数 $f(x)$が，ある区間のすべての x の値で連続であるとき，$f(x)$はその **区間で連続** であるという。

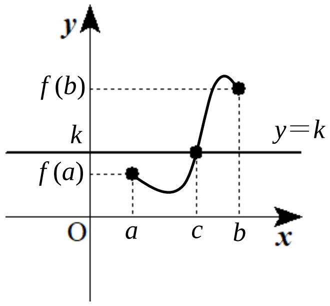
中間値の定理

関数 $f(x)$が区間$[a,\ b]$で連続で，$f(a)\neq f(b)$ならば，

$f(a)$と $f(b)$の間の任意の値 k に対して

$f(c)=k$，　$a<c<b$

を満たす c が少なくとも 1 つ存在する。



連続関数

関数 $f(x)$が定義域のすべての x の値で連続であるとき，$f(x)$を **連続関数** という。

整式で表される関数や分数関数，無理関数，三角関数，指数関数，対数関数などは連続関数である。

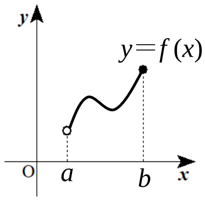
例えば，関数$y=\dfrac{1}{x}$は$x=0$ でグラフがつながっていないが，$y=\dfrac{1}{x}$は$x=0$ が定義域ではないため連続関数である。

最大値・最小値

閉区間で連続な関数 $f(x)$は，その閉区間で，最大値と最小値をもつ。

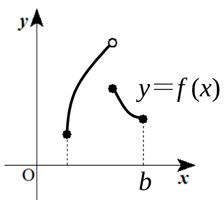
開区間で連続な関数や，閉区間に不連続な x の値をもつ関数は，最大値または最小値をもたない場合がある。

●区間$(a,\ b]$で連続



最小値がない

●不連続な x の値がある



最大値がない

解答

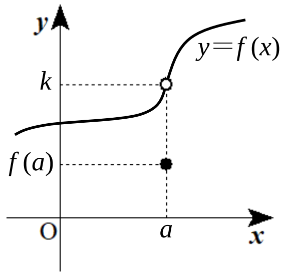
(1)　①　$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}|x|=0$，$\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}|x|=0$ より　$\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}|x|=0=f(0)$

よって，$f(x)$は $x=0$ で **連続である。**

②　$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{x}{|x|}=1$，$\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}\frac{x}{|x|}=-1$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)$ が存在しないため，$f(x)$は$x=0$ で **不連続である。**

$\lim_{x \to a} f(x)$ が存在し，$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$となる
のは，例えば右の図のようなときである。



$\lim_{x \to a} f(x) = k$，
$k \neq f(a)$

(2)　$f(x) = \sqrt{x} - \cos x$ とおくと，関数$f(x)$は区間$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$で連続であり

$$f(0) = 0 - 1 = -1 < 0,\qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - 0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} > 0$$

したがって，中間値の定理により，　$f(c) = 0$，　$0 < c < \frac{\pi}{2}$　を満たすcが少なくとも 1 つ存在

するので，方程式$f(x) = 0$ は区間$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$において，少なくとも 1 つの実数解をもつ。

研究　**調和級数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$が発散することの証明**

無限級数 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} + \cdots\cdots$ は発散することを証明せよ。

要　点

無限級数 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n} + \cdots\cdots$ を，**調和級数** とよぶこともある。

調和級数において，項の区切り方を工夫することで，$\sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} \geqq 1 + \frac{m}{2}$となることを見出す。

証明

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^m} > 1 + \frac{1}{2} \times m$$

すなわち　$\sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} \geqq 1 + \frac{m}{2}$　……①　　　これを，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$m=1$ のとき　　$(\text{左辺})=\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}$，　$(\text{右辺})=1+\dfrac{1}{2}$　　　よって，①は成り立つ。

(ii)　$m=p$のとき，①が成り立つと仮定すると　$\displaystyle\sum_{k=1}^{2^p}\frac{1}{k}\geqq 1+\frac{p}{2}$

このとき

$$\sum_{k=1}^{2^{p+1}}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{2^p}\frac{1}{k}+\sum_{k=2^p+1}^{2^{p+1}}\frac{1}{k}\geqq\left(1+\frac{p}{2}\right)+\frac{1}{2^p+1}+\frac{1}{2^p+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{p+1}}$$

$\boxed{2^{p+1}=2\cdot 2^p=2^p+2^p}$

$$=\left(1+\frac{p}{2}\right)+\frac{1}{2^p+1}+\frac{1}{2^p+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^p+2^p}>\left(1+\frac{p}{2}\right)+\underbrace{\frac{1}{2^p+2^p}+\frac{1}{2^p+2^p}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^p+2^p}}_{2^p\text{個}}$$

$$=\left(1+\frac{p}{2}\right)+\frac{1}{2^{p+1}}\cdot 2^p=\left(1+\frac{p}{2}\right)+\frac{1}{2}=1+\frac{p+1}{2}$$

よって，$m=p+1$ のときも①は成り立つ。

(i)，(ii)から，すべての自然数 m について①は成り立つ。

$m\to\infty$ のとき $2^m\to\infty$であり，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{m}{2}\right)=\infty$であることから　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\infty$

したがって，無限級数 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots\cdots$ は発散する。

「$\boxed{5}$　**無限級数の性質**」で　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **が収束するならば，**$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$**である**　ことを学習した。

この逆は成り立たない。すなわち，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$**であっても，**$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **は収束するかどうかわからない。**

実際，上の $\boxed{\text{研究}}$ で見たように，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるが，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$は発散する。

例えば，次のことを「$\boxed{4}$　**無限級数**」で学習している。

・$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$は，1 に収束する。　　　　・$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$は発散する。

・無限等比級数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$は，$|r|<1$ のとき $\dfrac{a}{1-r}$ に収束する。

また，次のことが知られている。

・$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$は$s>1$ のとき収束し，$s\leqq 1$ のとき発散する。

・素数の逆数の無限級数$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\cdots\cdots$は発散する。