整数の性質

1　倍数の性質

a，b は整数とする。$a+b$，a が 3 の倍数ならば，b は 3 の倍数であることを証明せよ。

要　点

整数 a と 0 でない整数 b に対して，

$$a=bk$$

となる整数 k があるとき，a は b の **倍数** であるという。

0 はすべての整数の倍数である。

証明

$a+b$，a が 3 の倍数であるから，整数 k，l を用いて，

$$a+b=3k,\ a=3l$$

と表すことができる。

よって　$b=(a+b)-a=3k-3l=3(k-l)$

$k-l$ は整数であるから，b は 3 の倍数である。

2　約数の利用

次の式を満たす整数 x，y の組(x, y)をすべて求めよ。

(1)　$xy=4$　　　　(2)　$xy-5x-y=0$

要　点

整数 a と 0 でない整数 b に対して，

$$a=bk$$

となる整数 k があるとき，b は a の **約数** であるという。また，a は b で **割り切れる** という。

1 はすべての整数の約数である。すべての整数は，その整数自身の約数である。

また，すべての整数は 0 の約数である。

(2)　（x の式）×（y の式）＝整数　　の形に変形する。

解答

(1)　x は 4 の約数となるから　$x=\pm1, \pm2, \pm4$

したがって，求める組は

$$\boldsymbol{(x, y)=(1, 4), (2, 2), (4, 1),}$$
$$\boldsymbol{(-1, -4), (-2, -2), (-4, -1)}$$

(2)　$xy-5x-y=0$ について，

$(y-5)x-(y-5)-5=0$ から

$$(x-1)(y-5)=5$$

と変形できる。

$x-1$，$y-5$ は整数であり，5 の約数は±1，±5 であるから

$\begin{cases} x-1=1 \\ y-5=5 \end{cases}$　$\begin{cases} x-1=5 \\ y-5=1 \end{cases}$　$\begin{cases} x-1=-1 \\ y-5=-5 \end{cases}$　$\begin{cases} x-1=-5 \\ y-5=-1 \end{cases}$

$x-1$	1	5	-1	-5
$y-5$	5	1	-5	-1
x	2	6	0	-4
y	10	6	0	4

したがって，求める組は

$(x, y)=(2, 10), (6, 6), (0, 0), (-4, 4)$

3　倍数の判定法

5 個の自然数 2015，2016，2017，2018，2019 のうち，次の条件を満たすものをすべて答えよ。

(1)　2 の倍数　　(2)　3 の倍数　　(3)　4 の倍数　　(4)　5 の倍数　　(5)　9 の倍数

要　点

N を自然数とする。

・N が 2 の倍数 $\Leftrightarrow$ N の一の位の数が偶数

・N が 5 の倍数 $\Leftrightarrow$ N の一の位の数が 0 か 5

・N が 4 の倍数 $\Leftrightarrow$ N の下 2 桁の数が 4 の倍数

・N が 3 の倍数 $\Leftrightarrow$ N の各位の数の和が 3 の倍数

・N が 9 の倍数 $\Leftrightarrow$ N の各位の数の和が 9 の倍数

解答

(1)　5 個の自然数のうち，一の位の数が偶数であるものは　**2016，2018**

(2)　5 個の自然数のうち，各位の数の和が 3 の倍数であるものは　**2016，2019**

(3)　5 個の自然数のうち，下 2 桁の数が 4 の倍数であるものは　**2016**

(4)　5 個の自然数のうち，一の位の数が 0 か 5 であるものは　**2015**

(5)　5 個の自然数のうち，各位の数の和が 9 の倍数であるものは　**2016**

4　素因数分解

次の問いに答えよ。

(1)　次の数を素因数分解せよ。

①　98　　　②　100

(2)　$\sqrt{\dfrac{126}{n}}$ が自然数となるような，最小の自然数 n を求めよ。

要　点

素因数分解

1 より大きい自然数で，正の約数が 1 とその数だけのものを **素数** という。（1 でも素数でもない自然数を **合成数** という。）

整数がいくつかの正の約数の積で表されるとき，1 つ 1 つの約数をもとの整数の **因数** という。素数である因数を **素因数** という。整数を素因数の積の形に表すことを **素因数分解** するという。

(2)　$\frac{126}{n}$ がある自然数の平方数になればよい。すなわち，$\frac{126}{n}$ の素因数分解において，それぞれの素因数の指数がすべて偶数になればよい。

解答

(1)　①　98＝$\mathbf{2\times7^2}$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 98 \\ \hline 7 & 49 \\ \hline & 7 \end{array}$$

②　100＝$\mathbf{2^2\times5^2}$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 100 \\ \hline 2 & 50 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline & 5 \end{array}$$

(2)　126＝$2\times3^2\times7$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 126 \\ \hline 3 & 63 \\ \hline 3 & 21 \\ \hline & 7 \end{array}$$

$\frac{126}{n}=\frac{2\times3^2\times7}{n}$ の素因数分解において，それぞれの素因数の指数がすべて偶数になる自然数 n は

$n=2\times7$ のとき　$\frac{126}{n}=\frac{2\times3^2\times7}{2\times7}=3^2$

$n=2\times3^2\times7$ のとき　$\frac{126}{n}=\frac{2\times3^2\times7}{2\times3^2\times7}=1^2$

したがって，求める自然数 n は　**14**

5 **最大公約数・最小公倍数**

(1)　次の 2 数の最大公約数，最小公倍数を求めよ。

　①　6，8　　　　　②　28，42

(2)　次の 3 数の最大公約数，最小公倍数を求めよ。

　①　12，15，18　　　　　②　45，60，210

(3)　最大公約数が 9，最小公倍数が 108 となる 2 つの自然数の組をすべて求めよ。

(4)　積が 96，最大公約数が 4 となる 2 つの自然数の組をすべて求めよ。

要　点

最大公約数 は，共通な素因数の指数のうち最小のものをとる。

$40 = 2^3 \times 5$

$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$

↓　↓

$2^2 \times 5 = 20$

最小公倍数 は，すべての素因数の指数のうち最大のものをとる。

$40 = 2^3 \times 5$

$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$

↓　↓　↓

$2^3 \times 3 \times 5^2 = 600$

自然数 a，b の最大公約数を g，最小公倍数を l とし，$a = ga'$，$b = gb'$ とするとき，次のことが成り立つ。

1　a'，b' は互いに素である　　**2**　$l = ga'b'$　　**3**　$ab = gl$

解答

(1)　①　$6 = 2 \times 3$

　　$8 = 2^3$

　　最大公約数は　**2**

　　最小公倍数は　$2^3 \times 3 =$ **24**

　②　$28 = 2^2 \times 7$

　　$42 = 2 \times 3 \times 7$

　　最大公約数は　$2 \times 7 =$ **14**

　　最小公倍数は　$2^2 \times 3 \times 7 =$ **84**

(2)　①　$12 = 2^2 \times 3$

　　$15 = 3 \times 5$

　　$18 = 2 \times 3^2$

　　最大公約数は　**3**

　　最小公倍数は　$2^2 \times 3^2 \times 5 =$ **180**

② $45 = 3^2 \times 5$

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$

$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$

最大公約数は $3 \times 5 = \mathbf{15}$

最小公倍数は $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = \mathbf{1260}$

(3) 2 つの自然数を a，b $(a < b)$ とすると，最大公約数が 9 であるから

$a = 9a'$，$b = 9b'$ （a'，b' は互いに素で $a' < b'$）

と表すことができる。このとき，最小公倍数が 108 であるから $9a'b' = 108$ よって $a'b' = 12$

a'，b' は互いに素で，$a' < b'$ より $(a', b') = (1, 12), (3, 4)$

$(a', b') = (1, 12)$ のとき $a = 9 \times 1 = 9$，$b = 9 \times 12 = 108$

$(a', b') = (3, 4)$ のとき $a = 9 \times 3 = 27$，$b = 9 \times 4 = 36$

したがって， **9 と 108，27 と 36**

(4) 2 つの自然数を a，b $(a < b)$ とし，最小公倍数を l，最大公約数を g とすると，$ab = gl$ が成り立つ。

積が 96，最大公約数が 4 であるから $96 = 4 \times l$ よって $l = 24$

また，$a = 4a'$，$b = 4b'$ （a'，b' は互いに素で $a' < b'$）と表すと，$l = ga'b'$ から $24 = 4a'b'$

よって $a'b' = 6$

a'，b' は互いに素で，$a' < b'$ より $(a', b') = (1, 6), (2, 3)$

$(a', b') = (1, 6)$ のとき $a = 4 \times 1 = 4$，$b = 4 \times 6 = 24$

$(a', b') = (2, 3)$ のとき $a = 4 \times 2 = 8$，$b = 4 \times 3 = 12$

したがって， **4 と 24，8 と 12**

6 割り算の余りの性質

a，b は整数とする。a を 6 で割ると 2 余り，b を 6 で割ると 3 余る。このとき，次の式の値を 6 で割ったときの余りを求めよ。

(1) $a + b$ (2) ab

要 点

整数 a と自然数 b に対して

$\boldsymbol{a = bq + r,\quad 0 \leqq r < b}$

を満たす整数 q，r がただ 1 通りに決まる。q を，a を b で割ったときの **商**，r を **余り** という。

解答

整数 k，l を用いて，$a = 6k + 2$，$b = 6l + 3$ と表すことができる。

(1) $a + b = (6k + 2) + (6l + 3) = 6(k + l) + 5$

ここで，$k + l$ は整数であるから，$a + b$ を 6 で割ったときの余りは **5** である。

(1) $ab = (6k + 2)(6l + 3) = 36kl + 18k + 12l + 6 = 6(6kl + 3k + 2l + 1)$

ここで，$6kl + 3k + 2l + 1$ は整数であるから，ab を 6 で割ったときの余りは **0** である。

$\boxed{7}$ **整数の分類の利用**

n は整数とする。n^2 を 3 で割ったときの余りは 0 か 1 であることを証明せよ。

要　点

一般に，m を 2 以上の自然数として，整数を m で割ったときの余りで分類すると，すべての整数は次のいずれかの形で表される。

$\boldsymbol{mk,\ mk+1,\ mk+2,\ \cdots\cdots,\ mk+(m-1)}$　**(k は整数)**

証明

k を整数とすると，すべての整数 n は，$3k$，$3k+1$，$3k+2$ のいずれかの形で表される。

(ⅰ)　$n=3k$ のとき　$n^2=(3k)^2=9k^2=3\cdot 3k^2$

(ⅱ)　$n=3k+1$ のとき　$n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$

(ⅲ)　$n=3k+2$ のとき　$n^2=(3k+2)^2=9k^2+6k+4=3(3k^2+2k+1)+1$

よって，n^2 を 3 で割ったときの余りは 0 か 1 である。

$\boxed{8}$ **ユークリッドの互除法**

次の 2 数の最大公約数を求めよ。

(1)　551，665　　(2)　1111，1606

要　点

ユークリッドの互除法

自然数 a を自然数 b で割ったときの商を q，余りを r とする。

$r>0$ のとき

a と b の最大公約数は，

b と r の最大公約数に等しい。

$r=0$ のとき

a と b の最大公約数は b である。

a と b の最大公約数

$$a=bq+r$$

等しい

b と r の最大公約数

解答

(1)　$665=551\times1+114$

$551=114\times4+95$

$114=\ \ 95\times1+19$

$\ \ 95=\ \ 19\times5$

したがって，最大公約数は　**19**

	5	1	4	1
19	)95	)114	)551	)665
	95	95	456	551
	0	19	95	114

右の筆算から計算していく。

(2)　$1606=1111\times1+495$

$1111=495\times2+121$

$495=121\times4+11$

$121=11\times11$

したがって，最大公約数は　**11**

11	4	2	1
11)121	)495	)1111	)1606
121	484	990	1111
0	11	121	495

右の筆算から計算していく。

9　2元1次不定方程式

次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1)　$3x=8y$　　(2)　$3x+8y=1$　　(3)　$3x+8y=3$

要　点

不定方程式を解くときは，次の性質を利用する。

自然数 a，b は互いに素で，x，y は整数とする。

$ax=by$ が成り立つならば，x は b の倍数，y は a の倍数である。

解答

(1)　$3x=8y$　……①

3 と 8 は互いに素であるから，x は 8 の倍数である。よって，k を整数として　$x=8k$　……②

と表すことができる。

②を①に代入すると　$3\times8k=8y$　　よって　$y=3k$

したがって，整数解は　**$x=8k$，$y=3k$（k は整数）**

(2)　$3x+8y=1$　……①

の 1 組の整数解は $x=3$，$y=-1$ であるから　$3\times3+8\times(-1)=1$　……②

①－②より　$3(x-3)+8(y+1)=0$　　移項すると　$3(x-3)=8(-y-1)$

3 と 8 は互いに素であるから，k を整数として　$x-3=8k$，$-y-1=3k$

したがって，整数解は　**$x=8k+3$，$y=-3k-1$（k は整数）**

(3)　$3x+8y=3$　……①

$3x+8y=1$ の 1 組の整数解は $x=3$，$y=-1$ であるから　$3\times3+8\times(-1)=1$

両辺を 3 倍すると　$3\times9+8\times(-3)=3$　……②

①－②より　$3(x-9)+8(y+3)=0$　　移項すると　$3(x-9)=8(-y-3)$

3 と 8 は互いに素であるから，k を整数として　$x-9=8k$，$-y-3=3k$

したがって，整数解は　**$x=8k+9$，$y=-3k-3$（k は整数）**

〈注意〉(2)で，$3x+8y=1$ の 1 組の整数解を $x=-5$，$y=2$ として解くと　$3(x+5)+8(y-2)=0$ から $x=8k-5$，$y=-3k+2$（k は整数）となる。これは，(2)で求めた $x=8k+3$，$y=-3k-1$（k は整数）の k を $k-1$ に置き換えると得られる。

１０　**有限小数と循環小数，記数法の変換**

(1)　次の分数を小数で表したとき，有限小数になるかどうか調べよ。

①　$\dfrac{1}{64}$　　②　$\dfrac{1}{60}$　　③　$\dfrac{3}{60}$

(2)　次の数を 10 進数で表せ。

①　$110_{(2)}$　　②　$2016_{(7)}$　　③　$10.11_{(2)}$

(3)　次の 10 進数を，[　　] 内で指示された記数法で表せ。

①　11 [2 進法]　　②　100 [3 進法]　　③　$\dfrac{3}{8}$ [2 進法]

要　点

有限小数と循環小数

m，n を自然数とすると，次のことが成り立つ。

・既約分数 $\dfrac{m}{n}$ が有限小数 $\Longleftrightarrow$ 分母 n が 2 または 5 だけの素因数をもつ。

・既約分数 $\dfrac{m}{n}$ が循環小数 $\Longleftrightarrow$ 分母 n が 2 と 5 以外の素因数をもつ。

記数法

10 の累乗の位取りによる記数法を **10 進法** といい，10 進法で表された数を **10 進数** という。

例えば，10 進数 2016 は　$2\times10^3+0\times10^2+1\times10^1+6$　を表している。

10 進数の各位の数字は，0 以上 9 以下の整数である。

2 の累乗の位取りによる記数法を **2 進法** といい，2 進法で表された数を **2 進数** という。

例えば，2 進数 101 は　$1\times2^2+0\times2^1+1$　を表しているから，10 進数で表すと $4+0+1=5$ となる。

2 進数の各位の数字は，0 または 1 である。10 進数と区別するため，例えば 2 進数 101 は添え字を用いて $101_{(2)}$のように表す。なお，10 進数では，普通 $2016_{(10)}$の$_{(10)}$は省略して，2016 と書く。

一般に，n の累乗の位取りによる記数法を **n 進法** といい，n 進法で表された数を **n 進数** という。

解答

(1)　①　$64=2^6$ より，分母の素因数は 2 のみである。よって，**有限小数になる**。

②　$60=2^2\times3\times5$ より，分母の素因数に 2 と 5 以外のものがある。よって，**有限小数にならない**。

③　$\dfrac{3}{60}$ を既約分数で表すと　$\dfrac{1}{20}$

$20=2^2\times5$ より，分母の素因数は 2 と 5 のみである。よって，**有限小数になる**。

(2)　①　$110_{(2)}=1\times2^2+1\times2+0=\mathbf{6}$

②　$2016_{(7)}=2\times7^3+0\times7^2+1\times7+6=\mathbf{699}$

③　$10.11_{(2)}=1\times2+0+1\times\dfrac{1}{2}+1\times\dfrac{1}{2^2}=\mathbf{\dfrac{11}{4}}$

(3) ① $11=2\times5+1$

$=2\times(2\times2+1)+1$

$=2^3+2+1$

$=1\times2^3+0\times2^2+1\times2+1$

$=\mathbf{1011_{(2)}}$

2)11
2) 5…1
2) 2…1
1…0

② $100=3\times33+1$

$=3\times(3\times11)+1$

$=3^2\times11+1$

$=3^2\times(3\times3+2)+1$

$=3^4+3^2\times2+1$

$=1\times3^4+0\times3^3+2\times3^2+0\times3+1$

$=\mathbf{10201_{(3)}}$

3)100
3) 33…1
3) 11…0
3) 3…2
1…0

③ $\dfrac{3}{8}=\dfrac{2\times1+1}{2^3}=0+0\times\dfrac{1}{2}+1\times\dfrac{1}{2^2}+1\times\dfrac{1}{2^3}=\mathbf{0.011_{(2)}}$

研究１　**末尾に並ぶ 0 の個数**

30！を計算すると，末尾に 0 が何個並ぶか。ただし，30！は 1 から 30 までのすべての自然数の積を表す。

解答

$30!=30\times29\times28\times27\times\cdots\cdots\times3\times2\times1=2^a\times3^b\times5^c\times7^d\times\cdots\cdots$　（a，b，c，d，…は整数）

30！を素因数分解したとき，素因数 2 の方が素因数 5 より多く含まれるので，c より a の方が大きい。

よって　$30!=2^{a-c}\times3^b\times7^d\times\cdots\cdots\times(2^c\times5^c)=2^{a-c}\times3^b\times7^d\times\cdots\cdots\times10^c$

30！を計算したときの末尾に並ぶ 0 の個数は，c に等しい。すなわち，30！を素因数分解したときの素因数 5 の個数と等しい。

1 から 30 までの自然数のうち，5 の倍数は 6 個，5^2 の倍数は 1 個ある。よって，30！は 5 で 6 回割り切れ，その商は，さらに 5 で 1 回割り切れる。

したがって，30！を素因数分解したときの素因数 5 の個数は　$6+1=7$（個）

すなわち，末尾に 0 が **7 個** 並ぶ。

研究２　**合同式**

合同式を利用して，次のものを求めよ。

(1)　6^{10} を 5 で割ったときの余り

(2)　123^{456} を 7 で割ったときの余り

要　点

合同式

整数 a，b について，$a-b$ が自然数 n で割り切れるとき，a と b は n を **法** として **合同** であるといい，

$\boldsymbol{a\equiv b \pmod{n}}$と表す。このような式を **合同式** という。

合同式の性質

次の性質が成り立つ。

$\boxed{1}$　$\boldsymbol{a\equiv a \pmod{n}}$

$\boxed{2}$　$\boldsymbol{a\equiv b \pmod{n}}$ ならば　$\boldsymbol{b\equiv a \pmod{n}}$

$\boxed{3}$　$\boldsymbol{a\equiv b \pmod{n}}$ かつ $\boldsymbol{b\equiv c \pmod{n}}$ ならば　$\boldsymbol{a\equiv a \pmod{n}}$

また，$\boldsymbol{a\equiv b \pmod{n}}$，$\boldsymbol{c\equiv d \pmod{n}}$のとき，次の性質が成り立つ。

$\boxed{4}$　$\boldsymbol{a+c\equiv b+d \pmod{n}}$

$\boxed{5}$　$\boldsymbol{a-c\equiv b-d \pmod{n}}$

$\boxed{6}$　$\boldsymbol{ac\equiv bd \pmod{n}}$

$\boxed{7}$　$\boldsymbol{a^m\equiv b^m \pmod{n}}$　（$\boldsymbol{m}$ は自然数）

解答

(1)　$6\equiv 1 \pmod{5}$であるから　$6^{10}\equiv 1^{10}\equiv 1 \pmod{5}$　　したがって，余りは　**1**

(2)　$123\equiv 4 \pmod{7}$であるから　$123^{456}\equiv 4^{456}\equiv 4^{2\times 228}\equiv 16^{228} \pmod{7}$

$16\equiv 2 \pmod{7}$であるから　$16^{228}\equiv 2^{228}\equiv 2^{3\times 76}\equiv 8^{76} \pmod{7}$

$8\equiv 1 \pmod{7}$であるから　$8^{76}\equiv 1^{76}\equiv 1 \pmod{7}$　　したがって，余りは　**1**

研究３　**互いに素であることの証明**

a，b を自然数とするとき，次のことを証明せよ。

(1)　①　a，b が互いに素であるとき，$a+b$，ab は互いに素である。

②　$a+b$，ab が互いに素であるとき，a，b は互いに素である。

(2)　$ax+by=1$ を満たす整数 x，y が存在するとき，a，b は互いに素である。

証明

(1)　①　背理法を用いる。

a，b が互いに素であるとき，$a+b$，ab は互いに素でないと仮定する。

このとき，$a+b$，ab はある素数 p を公約数にもつから

$a+b=pk$　……①，$ab=pl$　……②　（k，l は自然数）

と表すことができる。②から，a または b は p の倍数である。

a が p の倍数であるとき，$a=pm$ となる自然数 m がある。このとき，①から

$b=pk-a=pk-pm=p(k-m)$

となり，b も p の倍数である。このことは，a，b が互いに素であることに矛盾する。

b が p の倍数であるときも，同様にして a も p の倍数となり，矛盾する。

したがって，a，b が互いに素であるとき，$a+b$，ab は互いに素である。

② 背理法を用いる。

$a+b$，ab が互いに素であるとき，a，b は互いに素でないと仮定する。

このとき，a，b はある素数 p を公約数にもつから　$a=pk$　$b=pl$　（k，l は自然数）

と表すことができる。このとき　$a+b=pk+pl=p(k+l)$，$ab=pk\cdot pl=p^2kl$

$k+l$，kl は自然数であるから，$a+b$，ab はともに p の倍数である。

このことは，$a+b$，ab が互いに素であるに矛盾する。

したがって，$a+b$，ab が互いに素であるとき，a，b は互いに素である。

(2)　a，b は互いに素でないと仮定する。

このとき，a，b はある素数 p を公約数にもつから　$a=pk$　$b=pl$　（k，l は自然数）

と表すことができる。これらを，$ax+by=1$ に代入すると　$pkx+ply=1$　$p(kx+ly)=1$

$kx+ly$ は整数であるから，p は 1 の約数となるが，このことは p が素数であることに矛盾する。

したがって，$ax+by=1$ を満たす整数 x，y が存在するとき，a，b は互いに素である。

研究４　**部屋割り論法（鳩の巣原理）**

1 から 6 までの自然数が書かれた 6 枚のカードがある。この中から無作為に 4 枚のカードを選ぶと，それらのカードの中には，合計が 7 である 2 枚のカードの組が含まれる。このことを，部屋割り論法を用いて証明せよ。

要　点

部屋割り論法

n 個の部屋に $n+1$ 人以上の人を入れると，いずれかの部屋には 2 人以上入ることになる。

証明

与えられた 6 枚のカードを次のような組に分ける。

{1，6}，{2，5}，{3，4}

このとき，各組に入る 2 つの数の合計はすべて 7 である。これらの組は 3 種類あるので，1 から 6 までの自然数が書かれた 6 枚のカードから無作為に 4 枚のカードを選ぶと部屋割り論法により，同じ組に入る 2 つの数がある。よって，1 から 6 までの自然数が書かれた 6 枚のカードから無作為に 4 枚のカードを選ぶと，合計が 7 である 2 枚のカードの組が含まれる。