

数列

ここで扱う数は、すべて実数とする。

1 等差数列・等比数列

次の数列の一般項 a_n 、初項から第 n 項までの和 S_n をそれぞれ求めよ。

- (1) 1, 3, 5, 7, 9, ……
- (2) 1, (-3), 9, (-27), 81, ……
- (3) 第3項が2, 第5項が-1の等差数列
- (4) 第2項が8, 第5項が1の等比数列
- (5) 初項から第5項までの和が10, 第6項から第10項までの和が60である等差数列
- (6) 初項から第3項までの和が3, 第4項から第6項までの和が24である等比数列

要 点

・等差数列

等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a 、公差を d 、末項を l 、一般項を a_n 、初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$S_n = \frac{1}{2}n(a+l) = \frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$$

・等比数列

等比数列 $\{a_n\}$ の初項を a 、公比を r 、一般項を a_n 、初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$r \neq 1 \text{ のとき } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}, \quad r=1 \text{ のとき } S_n = na$$

解答

- (1) 初項が1, 公差が2の等差数列であるから

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n-1, \quad S_n = \frac{1}{2}n\{2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 2\} = n^2$$

- (2) 初項が1, 公比が-3の等比数列であるから

$$a_n = 1 \cdot (-3)^{n-1} = (-3)^{n-1}, \quad S_n = \frac{1 \cdot \{1 - (-3)^n\}}{1 - (-3)} = \frac{1 - (-3)^n}{4}$$

- (3) 等差数列の初項を a 、公差を d とすると

$$a_3 = a + (3-1) \cdot d = a + 2d, \quad a_5 = a + (5-1) \cdot d = a + 4d$$

$$a_3 = 2, \quad a_5 = -1 \text{ であるから } \begin{cases} a+2d=2 \\ a+4d=-1 \end{cases} \quad \text{これを解くと } a=5, \quad d=-\frac{3}{2}$$

$$\text{よって } a_n = 5 + (n-1) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}n + \frac{13}{2}, \quad S_n = \frac{1}{2}n\left\{2 \cdot 5 + (n-1) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)\right\} = -\frac{3}{4}n^2 + \frac{23}{4}n$$

Math-Aquarium 【例題】 数列

(4) 等比数列の初項を a 、公比を r とすると $a_2 = a \cdot r^{2-1} = ar$, $a_5 = a \cdot r^{5-1} = ar^4$

$$a_2 = 8, a_5 = 1 \text{ であるから } \begin{cases} ar = 8 & \dots\dots ① \\ ar^4 = 1 & \dots\dots ② \end{cases} \quad \text{②に①を代入すると } 8r^3 = 1$$

r は実数であるから $r = \frac{1}{2}$ これを①に代入すると $a = 16$

$$\text{よって } a_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^4 \cdot 2^{-(n-1)} = 2^{5-n}$$

$$S_n = \frac{16 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 32 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} = 32 - 2^5 \cdot 2^{-n} = 32 - 2^{5-n}$$

(5) 等差数列の初項を a 、公差を d とすると

$$S_5 = \frac{1}{2} \cdot 5\{2a + (5-1) \cdot d\} = 5a + 10d, \quad S_{10} = \frac{1}{2} \cdot 10\{2a + (10-1) \cdot d\} = 10a + 45d$$

$$S_5 = 10, S_{10} - S_5 = 60 \text{ であるから } \begin{cases} 5a + 10d = 10 \\ 10a + 45d - (5a + 10d) = 60 \end{cases} \quad \text{これを解くと } a = -2, d = 2$$

$$\text{よって } a_n = -2 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 4, \quad S_n = \frac{1}{2} n \{ 2 \cdot (-2) + (n-1) \cdot 2 \} = n^2 - 3n$$

(6) 等比数列の初項を a 、公比を r とする。ここで、 $r=1$ のとき $S_3 = 3a$, $S_6 - S_3 = 3$ であるから $a=1$

$$S_6 - S_3 = 6 - 3 = 3 \neq 24 \quad \text{よって, } r \neq 1 \text{ である。 } S_3 = \frac{a(1-r^3)}{1-r}, \quad S_6 - S_3 = \frac{a(1-r^6)}{1-r} - \frac{a(1-r^3)}{1-r}$$

$$S_3 = 3, S_6 - S_3 = 24 \text{ であるから } \begin{cases} \frac{a(1-r^3)}{1-r} = 3 & \dots\dots ① \\ \frac{a(1-r^6)}{1-r} - \frac{a(1-r^3)}{1-r} = 24 & \dots\dots ② \end{cases}$$

$1-r^6 = (1-r^3)(1+r^3)$ であるから、②に①を代入すると $3(1+r^3) - 3 = 24$ 整理すると $r^3 = 8$

r は実数であるから $r = 2$ これを①に代入すると $a = \frac{3}{7}$

$$\text{よって } a_n = \frac{3}{7} \cdot 2^{n-1}, \quad S_n = \frac{\frac{3}{7}(2^n - 1)}{2-1} = \frac{3}{7}(2^n - 1)$$

コ ラ ム

各項の逆数が等差数列である数列を調和数列という。

例えば、 $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots\dots, \frac{1}{2n-1}$ は調和数列である。さて、調和数列 $6, 4, \square, \dots$ の \square に入る

数は、 $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{\square}$ が等差数列をなすから、この公差は $\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ よって $\frac{1}{\square} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$

したがって、 \square には 3 が入る。

2 等差中項・等比中項

4つの数 $1, a, b, 10$ がある。 $1, a, b$ はこの順で等比数列をなし、 $a, b, 10$ はこの順で等差数列をなす。このような実数 a, b をすべて求めよ。

要 点

・等差中項

数列 a, b, c が等差数列のとき、 b を a と c の等差中項といい、 $2b=a+c$ が成り立つ。

・等比中項

数列 a, b, c が等比数列のとき、 b を a と c の等比中項といい、 $b^2=ac$ が成り立つ。

解答

等差中項，等比中項の性質から
$$\begin{cases} a^2=b & \dots\dots ① \\ 2b=a+10 & \dots\dots ② \end{cases}$$

②に①を代入すると $2a^2=a+10$ 整理して因数分解すると $(a+2)(2a-5)=0$ よって $a=-2, \frac{5}{2}$

したがって $a=-2, b=4$ または $a=\frac{5}{2}, b=\frac{25}{4}$

3 Σ の計算

〈注意〉 Σ はシグマと読む。

(1) 次の和を求めよ。

① $\sum_{k=1}^n (k+2)$

② $\sum_{k=1}^{10} (k+1)^2$

③ $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$

(2) 数列 $1 \cdot 1, 2 \cdot 3, 3 \cdot 5, 4 \cdot 7, \dots\dots$ の一般項 a_n と、初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

要 点

・ Σ の定義

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots + a_n$$

・ Σ の公式

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n(n+1), \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2, \quad \sum_{k=1}^n c = cn \quad \text{ただし, } c \text{ は定数}$$

・ Σ の性質

$$\sum_{k=1}^n (pa_k + qb_k) = p \sum_{k=1}^n a_k + q \sum_{k=1}^n b_k$$

解答

$$(1) \textcircled{1} \quad \sum_{k=1}^n (k+2) = \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 2 = \frac{1}{2}n(n+1) + 2n = \frac{1}{2}n\{(n+1)+4\} = \frac{1}{2}n(n+5)$$

$$\textcircled{2} \quad \sum_{k=1}^n (k+1)^2 = \sum_{k=1}^n k^2 + 2\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + n$$

$$= \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)+6(n+1)+6\} = \frac{1}{6}n(2n^2+9n+13)$$

まず、 $\sum_{k=1}^n (k+1)^2$ を求めて
から、 n に 10 を代入する。

よって、 n に 10 を代入すると $\sum_{k=1}^{10} (k+1)^2 = \frac{1}{6} \cdot 10(2 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 13) = 505$

$$\textcircled{3} \quad \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(2) $1 \cdot 1, 2 \cdot 3, 3 \cdot 5, 4 \cdot 7, \dots$ は、初項 1、公差 1 の等差数列と初項 1、公差 2 の等差数列の積の数列であるから、一般項 a_n は $a_n = \{1 + (n-1) \cdot 1\} \{1 + (n-1) \cdot 2\} = n(2n-1)$

また、 $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 + \dots + n(2n-1) = \sum_{k=1}^n k(2k-1)$ であるから、初項から第 n 項までの和 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n k(2k-1) = 2\sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k = 2 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)\{2(2n+1)-3\} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(4n-1) \end{aligned}$$

4 いろいろな数列

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

$$(1) \quad \frac{1}{1 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 5}, \frac{1}{5 \cdot 7}, \frac{1}{7 \cdot 9}, \dots$$

$$(2) \quad 2 \cdot 2, 4 \cdot 4, 6 \cdot 8, 8 \cdot 16, \dots$$

$$(3) \quad \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}+2}, \frac{1}{2+\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}, \dots$$

要 点

(1) 一般に、 a, b, c を自然数、 $b \neq c$ とすると $\frac{1}{(a+b)(a+c)} = \frac{1}{c-b} \left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a+c} \right)$

が成り立つ。この変形を、**部分分数に分解する**といい、これを利用して和を求める。

(2) (等差数列)×(等比数列)からなる数列の和 S は、等比数列の公比が r のとき、 $S-rS$ を考えることにより求めることができる。

(3) 分母を有理化して、和を求める。

解答

(1) 一般項は $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ であり,

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{n}{2n+1} \end{aligned}$$

(2) 一般項は $2n \cdot 2^n$ であるから, 求める和を S とすると

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 6 \cdot 8 + \dots + 2n \cdot 2^n \\ \text{—) } 2S &= \quad 2 \cdot 4 + 4 \cdot 8 + \dots + 2(n-1) \cdot 2^n + 2n \cdot 2^{n+1} \\ S - 2S &= 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 8 + \dots + 2 \cdot 2^n - 2n \cdot 2^{n+1} \\ -S &= 2(2 + 4 + 8 + \dots + 2^n) - 2n \cdot 2^{n+1} = 2 \cdot \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} - 2n \cdot 2^{n+1} = 2^{n+2} - 4 - n \cdot 2^{n+2} \end{aligned}$$

よって $S = (n-1) \cdot 2^{n+2} + 4$

(3) 第 k 項は $\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}}$ であり, $\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2}}{k+1 - (k+2)} = \sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}$ であるから,

この式に $k=1, 2, \dots, n$ を代入して, 辺々を加えると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + 2} + \frac{1}{2 + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \\ &= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\cancel{2} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \cancel{2}) + \dots + (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = -\sqrt{2} + \sqrt{n+2} \end{aligned}$$

部分分数に分解するには, 等式

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$$

が n についての恒等式となるような定数 a, b の値を求める。

分母をはらって, 係数を比較すると

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2} \text{ が得られる。}$$

5 階差数列

- (1) 数列 $1, 2, 0, 4, -4, 12, \dots$ の一般項 a_n を求めよ。
- (2) 数列 $2, 3, 6, 11, 18, \dots$ の一般項 a_n と, 初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

要 点

数列 $\{a_n\}$ の隣合う 2 つの項の差 $b_n = a_{n+1} - a_n (n=1, 2, 3, \dots)$ を項とする数列 $\{b_n\}$ を, 数列 $\{a_n\}$ の階差数列という。

$$\begin{array}{cccccccc} \{a_n\} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & a_{n+1} \\ & & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow \\ \{b_n\} & & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n & \end{array}$$

$$n \geq 2 \text{ のとき } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

解答

求める数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。

(1) 数列 $\{b_n\}$ は、1, -2, 4, -8, 16, …… であるから、初項1, 公比-2の等比数列である。

よって $b_n = 1 \cdot (-2)^{n-1} = (-2)^{n-1}$ したがって、 $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-2)^{k-1} = 1 + \frac{1 - (-2)^{n-1}}{1 - (-2)} = 1 + \frac{1}{3} \{1 - (-2)^{n-1}\} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} (-2)^{n-1}$$

また、 $n=1$ のとき、 $a_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} (-2)^0 = 1$ より、数列 $\{a_n\}$ の初項と一致する。

以上から $a_n = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} (-2)^{n-1}$

(2) 数列 $\{b_n\}$ は、1, 3, 5, 7, …… であるから、初項1, 公差2の等差数列である。

よって $b_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n-1$ したがって、 $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} (n-1) \cdot n - (n-1) = 2 + n^2 - n - n + 1 = n^2 - 2n + 3$$

また、 $n=1$ のとき、 $a_1 = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 2$ より、数列 $\{a_n\}$ の初項と一致する。以上から $a_n = n^2 - 2n + 3$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (k^2 - 2k + 3) = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + 3n = \frac{1}{6} n \{ (n+1)(2n+1) - 6(n+1) + 18 \} \\ &= \frac{1}{6} n(2n^2 + 3n + 1 - 6n - 6 + 18) = \frac{1}{6} n(2n^2 - 3n + 13) \end{aligned}$$

6 数列の和と一般項

初項から第 n 項までの和 S_n が、 $S_n = 2n^2 + 7n$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

要 点

和 S_n と一般項 a_n の関係

数列 $\{a_n\}$ において、初項 a_1 から第 n 項までの和を S_n とすると $a_1 = S_1, \quad n \geq 2$ のとき $a_n = S_n - S_{n-1}$

解答

$$a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 = 9$$

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ のとき } a_n &= S_n - S_{n-1} = 2n^2 + 7n - \{2(n-1)^2 + 7(n-1)\} = 2n^2 + 7n - \{2(n^2 - 2n + 1) + 7n - 7\} \\ &= 2n^2 + 7n - (2n^2 - 4n + 2 + 7n - 7) = 4n + 5 \end{aligned}$$

また、 $n=1$ のとき $a_1 = 4 \cdot 1 + 5 = 9$ よって、 $a_n = 4n + 5$ は $n=1$ のときも成り立つ。

以上から $a_n = 4n + 5$

7 群数列

自然数 m が小さい順に m^2 個ずつ並んでいる数列1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, …… について、次の問いに答えよ。

(1) 7が最初に現れるのは第何項か。 (2) 第200項を求め、初項から第200項までの和を求めよ。

要 点

ある集まりに分けられた数列を**群数列**という。例題7の数列は、1を1個、2を4個、3を9個、……の集まりに分けた群数列とみる。

$$1 \mid 2, 2, 2, 2 \mid 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3 \mid 4, \dots$$

1が1個の集まりを第1群、2が4個の集まりを第2群、……と呼ぶ。

群数列では、(数列の第 n 項) \Leftrightarrow (第 N 群の k 番目の項) と置き換えることがポイントになる。

- (1) 7は第7群の最初の項として初めて現れるので、第1群から第6群までの項の総数を求める。
- (2) 第200項を、第 N 群の k 番目の項と置き換えるため、第1群から第 $(N-1)$ 群までの項の総数が、200未満で1番近くなる $N-1$ を求める。

解答

(1) 与えられた数列を $1 \mid 2, 2, 2, 2 \mid 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3 \mid 4, \dots$ と分けた群数列とみる。

第1群から第6群までの項の総数は
$$\sum_{k=1}^6 k^2 = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot (6+1)(2 \cdot 6+1) = 91$$

よって、7が最初に現れるのは **第92項**

(2) 第1群から第7群までの項の総数は
$$\sum_{k=1}^7 k^2 = \frac{1}{6} \cdot 7 \cdot (7+1)(2 \cdot 7+1) = 140$$

第1群から第8群までの項の総数は
$$\sum_{k=1}^8 k^2 = \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot (8+1)(2 \cdot 8+1) = 204$$

以上のことから、第200項は第8群の60番目の項であることがわかる。よって、第200項は **8** 初項から第200項までの和は、第1群から第7群までの和と8を60個加えたものである。

第 m 群には m が m^2 個あるので、第 m 群の数の和は m^3 である。よって、第1群から第7群までの和は

$$\sum_{k=1}^7 k^3 = \left\{ \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot (7+1) \right\}^2 = 784 \quad \text{したがって、初項から第200項までの和は } 784 + 8 \times 60 = \mathbf{1264}$$

8 漸化式

$a_1=2, a_{n+1}=4a_n-3 (n=1, 2, 3, \dots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

要 点

数列の隣り合う項の間の関係式で、これを用いて順に項を定めることができるものを数列の**漸化式**という。 $a_{n+1}=pa_n+q (n=1, 2, 3, \dots)$ 型の漸化式では、以下のように一般項を求める。

a_{n+1}, a_n の代わりに α とおいた方程式 $\alpha=pa+q$ (**特性方程式**) に対して、 $a_{n+1}=pa_n+q$ と $\alpha=pa+q$ の辺々を引くと $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ と変形できる。 $a_n-\alpha=b_n$ とおくと $a_{n+1}-\alpha=b_{n+1}$ であるから $b_{n+1}=pb_n$ これは初項 $b_1=a_1-\alpha$ 、公比 p の等比数列であるから、数列 $\{b_n\}$ の一般項 $b_n=(a_1-\alpha)p^{n-1}$ が求まる。これにより数列 $\{a_n\}$ の一般項 $a_n=(a_1-\alpha)p^{n-1}+\alpha$ が求まる。

〈注意〉漸化式にはいろいろなパターンがある。「[例題] 漸化式」にて、いろいろなパターンの解法を紹介している。

解答

特性方程式 $\alpha = 4\alpha - 3$ から $\alpha = 1$ よって、 $a_{n+1} = 4a_n - 3$ は $a_{n+1} - 1 = 4(a_n - 1)$ と変形できる。
 $a_n - 1 = b_n$ とおくと、 $a_{n+1} - 1 = b_{n+1}$ であるから $b_{n+1} = 4b_n$ ここで、 $b_1 = a_1 - 1 = 2 - 1 = 1$ より
 $b_n = 1 \cdot 4^{n-1} = 4^{n-1}$ したがって $a_n = 4^{n-1} + 1$

9 数学的帰納法

すべての自然数 n について、 $6^n - 1$ が 5 の倍数であることを、数学的帰納法を用いて証明せよ。

要 点**数学的帰納法**

自然数 n に関する事柄 P が、すべての自然数 n について成り立つことを証明するためには、次のことがいえればよい。

- (i) $n=1$ のとき、 P が成り立つ。
(ii) 任意の自然数 k に対して、 $n=k$ のとき P が成り立つと仮定する。

このとき、 $n=k+1$ のときも P が成り立つ。

《補足》上の (i)、(ii) がいえれば、なぜすべての自然数 n についていえたことになるのか？

(i) から、 $n=1$ のとき P が成り立つ。(ii) について、 $k=1$ のときを考えると、 $n=1+1=2$ のときも P が成り立つ。さらに、(ii) について、 $k=2$ のときを考えると、 $n=3$ のときも P が成り立つ。

以下、 $n=4, 5, 6, \dots$ と、すべての自然数 n について P が成り立つことがいえる。

ある自然数 m 以上のすべての自然数 n について、事柄 P が成り立つことを証明するためには、次のことがいえればよい。

- (i)' $n=m$ のとき、 P が成り立つ。
(ii)' $k \geq m$ である任意の自然数 k に対して、 $n=k$ のとき P が成り立つと仮定する。

このとき、 $n=k+1$ のときも P が成り立つ。

証明

- (i) $n=1$ のとき、 $6^1 - 1 = 5$ より、5 の倍数である。
(ii) $n=k$ のとき、 $6^k - 1$ が 5 の倍数であると仮定する。

このとき、 $n=k+1$ について考えると

$$\begin{aligned} 6^{k+1} - 1 &= 6 \cdot 6^k - 1 = 6(6^k - 1) + 6 - 1 \\ &= 6(6^k - 1) + 5 \end{aligned}$$

$6^k - 1$ が 5 の倍数であることが利用できるように式変形をする。

ここで、 $6^k - 1$ は 5 の倍数であるので、自然数 m を用いて、 $6^k - 1 = 5m$ とおける。よって、

$$6(6^k - 1) + 5 = 6 \cdot 5m + 5 = 5(6m + 1) \text{ から、} 6^{k+1} - 1 \text{ も 5 の倍数である。}$$

- (i)、(ii) から、すべての自然数 n について、 $6^n - 1$ は 5 の倍数である。