漸化式

ここで扱う数は，すべて実数とする。

1　等差数列・等比数列・階差数列と漸化式

次の条件によって定義される数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n-2$　　(2)　$a_1=-3$，$a_{n+1}=3a_n$　　(3)　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n-3n^2-n$

要　点

$a_1=a$ とする。

・$\boldsymbol{a_{n+1}=a_n+c}$ (c は定数) **型の漸化式**

これは，初項 a，公差 c の等差数列$\{a_n\}$を表している。よって　$a_n=a+(n-1)c$

・$\boldsymbol{a_{n+1}=ra_n}$ (r は定数) **型の漸化式**

これは，初項 a，公比 r の等比数列$\{a_n\}$を表している。よって　$a_n=ar^{n-1}$

・$\boldsymbol{a_{n+1}=a_n+f(n)}$ ($f(n)$は n の式) **型の漸化式**

これは，数列$\{f(n)\}$が数列$\{a_n\}$の階差数列となっている。よって　$a_1=a$，$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$

解答

(1)　初項が 2，公差が-2 の等差数列であるから　　$\boldsymbol{a_n}=2+(n-1)\cdot(-2)=\boldsymbol{-2n+4}$

(2)　初項が-3，公比が 3 の等比数列であるから　　$\boldsymbol{a_n}=-3\cdot 3^{n-1}=\boldsymbol{-3^n}$

(3)　数列$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$とすると　　$b_n=-3n^2-n$

よって，$n\geqq 2$ のとき　　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-3k^2-k)=1+(-3)\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)-\frac{1}{2}n(n-1)$

$$=1-\frac{1}{2}n(n-1)\{(2n-1)+1\}=1-n^2(n-1)=-n^3+n^2+1$$

また，$n=1$ のとき　$a_1=-1^3+1^2+1=1$　　よって，$a_n=-n^3+n^2+1$ は $n=1$ のときも成り立つ。

以上から　$\boldsymbol{a_n=-n^3+n^2+1}$

2　$\boldsymbol{a_{n+1}=pa_n+q}$ **型の漸化式**

$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n-1$ ($n=1$，2，3，……) で定義される数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

要　点

〈注意〉特性方程式を用いる解法は「[例題] 数列」で扱っています。ここでは，別の解法を紹介します。

$a_1=a$ とします。与えられた漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ と，n を 1 つ増やした $a_{n+2}=pa_{n+1}+q$ の 2 式を作って辺々を引くと　$a_{n+2}-a_{n+1}=p(a_{n+1}-a_n)$　　ここで，$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおけば，$b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}$ より $b_{n+1}=pb_n$　　また，$b_1=a_2-a_1=(pa_1+q)-a_1=q-(1-p)a$ より，等比数列$\{b_n\}$の一般項が求まります。

$a_{n+1}-a_n=b_n$ から，数列$\{a_n\}$の階差数列が$\{b_n\}$であるので，一般項 a_n が求まります。

解答

与えられた漸化式 $a_{n+1}=3a_n-1$ と，n を 1 つ増やした $a_{n+2}=3a_{n+1}-1$ の辺々を引くと

$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$　　ここで，$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおけば，$b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}$ より

$b_{n+1}=3b_n$　　また，$b_1=a_2-a_1=(3\cdot1-1)-1=1$ より　　$b_n=3^{n-1}$

$a_{n+1}-a_n=b_n$ から，数列$\{a_n\}$の階差数列が$\{b_n\}$であるので，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}=1+\frac{3^{n-1}-1}{3-1}=\frac{1}{2}\cdot3^{n-1}+\frac{1}{2}$$

また，$n=1$ のとき　$a_1=\frac{1}{2}\cdot3^{1-1}+\frac{1}{2}=1$　　よって，$a_n=\frac{1}{2}\cdot3^{n-1}+\frac{1}{2}$ は $n=1$ のときも成り立つ。

以上から　$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{2}\cdot3^{n-1}+\frac{1}{2}}$

別解　特性方程式 $\alpha=3\alpha-1$ から　$\alpha=\frac{1}{2}$　　よって，$a_{n+1}=3a_n-1$ は $a_{n+1}-\frac{1}{2}=3\left\{a_n-\frac{1}{2}\right\}$

と変形できる。$a_n-\frac{1}{2}=b_n$ とおくと，$a_{n+1}-\frac{1}{2}=b_{n+1}$ であるから　$b_{n+1}=3b_n$

ここで，$b_1=a_1-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ より　　$b_n=\frac{1}{2}\cdot3^{n-1}$　　したがって　$a_n=\frac{1}{2}\cdot3^{n-1}+\frac{1}{2}$

3　$a_{n+1}=pa_n+qn+r$ 型の漸化式

$a_1=0$，$a_{n+1}=2a_n+3n-4$ ($n=1$，2，3，……) で定義される数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

要　点

$a_{n+1}=pa_n+qn+r$ ($n=1$，2，3，……) 型の漸化式では，「1 つ増やして辺々を引く」方法で例題2の形に変形でき，一般項を求めることができます。

解答

与えられた漸化式 $a_{n+1}=2a_n+3n-4$ と，n を 1 つ増やした $a_{n+2}=2a_{n+1}+3(n+1)-4$ の辺々を引くと

$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)+3$

ここで，$a_{n+1}-a_n=b_n$ とおけば，$b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}$ より　$b_{n+1}=2b_n+3$

特性方程式 $\alpha=2\alpha+3$ から　$\alpha=-3$　　よって，$b_{n+1}=2b_n+3$ は $b_{n+1}+3=2(b_n+3)$ と変形できる。

$b_n+3=c_n$ とおくと，$b_{n+1}+3=c_{n+1}$ であるから　$c_{n+1}=2c_n$

ここで，$c_1=b_1+3=(a_2-a_1)+3=\{(2a_1+3\cdot1-4)-a_1\}+3=\{(2\cdot0+3\cdot1-4)-0\}+3=2$ より

$c_n=2^n$　　これから　$b_n=2^n-3$

$a_{n+1}-a_n=b_n$ から，数列$\{a_n\}$の階差数列が$\{b_n\}$であるので，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2^k-3)=0+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}-3(n-1)=2^n-3n+1$$

また，$n=1$ のとき　$a_1=2^1-3\cdot1+1=0$　　よって，$a_n=2^n-3n+1$ は $n=1$ のときも成り立つ。

以上から　$\boldsymbol{a_n=2^n-3n+1}$

$\boxed{4}$　**$a_{n+1}=pa_n+qr^n$ 型の漸化式**

$a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n+2\cdot3^n$ ($n=1$，2，3，……) で定義された数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

要　点

$a_{n+1}=pa_n+qr^n$ ($n=1$，2，3，……) 型の漸化式では，2 通りの一般項の求め方があります。

・両辺を r^{n+1} で割る ⇒ $\dfrac{a_{n+1}}{r^{n+1}}=\dfrac{p}{r}\cdot\dfrac{a_n}{r^n}+\dfrac{q}{r}$ … $b_n=\dfrac{a_n}{r^n}$ とおけば例題$\boxed{2}$の形になる。

・両辺を p^{n+1} で割る ⇒ $\dfrac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\dfrac{a_n}{p^n}+\dfrac{q}{p}\cdot\left(\dfrac{r}{p}\right)^n$ … $b_n=\dfrac{a_n}{p^n}$ とおけば階差数列の形になる。

解答その１

与えられた漸化式 $a_{n+1}=2a_n+2\cdot3^n$ の両辺を 3^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{a_n}{3^n}+\dfrac{2}{3}$

ここで，$\dfrac{a_n}{3^n}=b_n$ とおけば，$b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}$ より　$b_{n+1}=\dfrac{2}{3}b_n+\dfrac{2}{3}$

特性方程式 $\alpha=\dfrac{2}{3}\alpha+\dfrac{2}{3}$ から　$\alpha=2$　よって，$b_{n+1}=\dfrac{2}{3}b_n+\dfrac{2}{3}$ は $b_{n+1}-2=\dfrac{2}{3}(b_n-2)$ と変形できる。

$b_n-2=c_n$ とおくと，$b_{n+1}-2=c_{n+1}$ であるから　$c_{n+1}=\dfrac{2}{3}c_n$

ここで，$c_1=b_1-2=\dfrac{a_1}{3^1}-2=\dfrac{3}{3}-2=-1$ より　$c_n=-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$　これから　$b_n=-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}+2$

$\dfrac{a_n}{3^n}=b_n$ から　$a_n=3^n\left\{-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}+2\right\}$　したがって　$\boldsymbol{a_n=2\cdot3^n-3\cdot2^{n-1}}$

解答その２

与えられた漸化式 $a_{n+1}=2a_n+2\cdot3^n$ の両辺を 2^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{2^n}+\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

ここで，$\dfrac{a_n}{2^n}=b_n$ とおけば，$b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}$ より　$b_{n+1}=b_n+\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

$b_1=\dfrac{a_1}{2^1}=\dfrac{3}{2}$ であるから，$n\geqq2$ のとき　$b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{3}{2}\right)^k=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\dfrac{3}{2}\left\{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\}}{\dfrac{3}{2}-1}=3\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-\dfrac{3}{2}$

また，$n=1$ のとき　$b_1=3\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{1-1}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$　よって，$b_n=3\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-\dfrac{3}{2}$ は $n=1$ のときも成り立つ。

$\dfrac{a_n}{2^n}=b_n$ から　$a_n=2^n\left\{3\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-\dfrac{3}{2}\right\}$　したがって　$\boldsymbol{a_n=2\cdot3^n-3\cdot2^{n-1}}$

$\boxed{5}$ **隣接 3 項間漸化式**

次の条件によって定義される数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(1) $a_1=2$，$a_2=3$，$a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=0$

(2) $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$

要　点

$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$) 型の漸化式では，以下のように一般項を求めます。

a_{n+2} を x^2，a_{n+1} を x，a_n を 1 と置き換えた方程式 $x^2+px+q=0$（**特性方程式その２**）を作ります。

この 2 次方程式の解を α，β とすると，解と係数の関係により，$\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=q$ であるから，

$x^2+px+q=0$ は $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ と変形できます。

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=x^2-\alpha x-\beta x+\alpha\beta=0 \text{ より } \quad x^2-\alpha x=\beta x-\alpha\beta$$

元に戻すと　$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ となり，$a_{n+1}-\alpha a_n=b_n$ とおくと隣接 2 項間漸化式に変形できます。

解答

(1) 特性方程式 $x^2-7x+12=0$ から　$(x-3)(x-4)=0$ より　$x=3,\ 4$

$\alpha=3$，$\beta=4$ のとき，$a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=0$ は $a_{n+2}-3a_{n+1}=4(a_{n+1}-3a_n)$と変形できる。

$a_{n+1}-3a_n=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=4b_n$ となり　$b_1=a_2-3a_1=3-3\cdot2=-3$ から　$b_n=-3\cdot4^{n-1}$

よって　$a_{n+1}-3a_n=-3\cdot4^{n-1}$　……①

また，$\alpha=4$，$\beta=3$ とすると，$a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=0$ は

$a_{n+2}-4a_{n+1}=3(a_{n+1}-4a_n)$と変形できる。

$a_{n+1}-4a_n=c_n$ とおくと　$c_{n+1}=3c_n$ となり

$c_1=a_2-4a_1=3-4\cdot2=-5$ から　$c_n=-5\cdot3^{n-1}$

よって　$a_{n+1}-4a_n=-5\cdot3^{n-1}$　……②

①－②から　$\boldsymbol{a_n=5\cdot3^{n-1}-3\cdot4^{n-1}}$

> ①を例題$\boxed{4}$の形の漸化式とみて一般項を求めることもできるが，
> $\alpha\neq\beta$ のとき，α と β を入れかえて a_{n+1}，a_n の関係を 2 通りに表し，a_{n+1} を消去する方が計算は楽である。

(2) 特性方程式 $x^2-6x+9=0$ から　$(x-3)^2=0$ より　$x=3$

$\alpha=\beta=3$ と考えて，$a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$ は $a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)$と変形できる。

$a_{n+1}-3a_n=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n$ となり　$b_1=a_2-3a_1=2-3\cdot1=-1$ から　$b_n=-3^{n-1}$

よって　$a_{n+1}-3a_n=-3^{n-1}$

両辺を 3^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\dfrac{a_n}{3^n}=-\dfrac{1}{9}$

> $\alpha=\beta$ のときは(1)の解法が使えないため，例題$\boxed{4}$の形の漸化式とみて一般項を求める。

$c_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと　$c_{n+1}=c_n-\dfrac{1}{9}$ であるから，数列$\{c_n\}$は，

初項が $c_1=\dfrac{a_1}{3^1}=\dfrac{1}{3}$，公差が$-\dfrac{1}{9}$ の等差数列である。よって　$b_n=\dfrac{1}{3}+(n-1)\cdot\left(-\dfrac{1}{9}\right)=-\dfrac{1}{9}n+\dfrac{4}{9}$

$\dfrac{a_n}{3^n}=-\dfrac{1}{9}n+\dfrac{4}{9}$ から　$a_n=3^n\left(-\dfrac{1}{9}n+\dfrac{4}{9}\right)$　　したがって　$\boldsymbol{a_n=(4-n)\cdot3^{n-2}}$