

漸化式

ここで扱う数は、すべて実数とする。

1 等差数列・等比数列・階差数列と漸化式

次の条件によって定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=2, a_{n+1}=a_n-2$

(2) $a_1=-3, a_{n+1}=3a_n$

(3) $a_1=1, a_{n+1}=a_n-3n^2-n$

要 点

$a_1=a$ とする。

・ $a_{n+1}=a_n+d$ (d は定数) 型の漸化式

これは、初項 a 、公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ を表している。よって $a_n=a+(n-1)d$

・ $a_{n+1}=ra_n$ (r は定数) 型の漸化式

これは、初項 a 、公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ を表している。よって $a_n=ar^{n-1}$

・ $a_{n+1}=a_n+f(n)$ ($f(n)$ は n の式) 型の漸化式

これは、数列 $\{f(n)\}$ が数列 $\{a_n\}$ の階差数列となっているので、 $a_1=a, n \geq 2$ のとき $a_n = a + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$

解答

(1) 初項が 2、公差が -2 の等差数列であるから $a_n=2+(n-1) \cdot (-2)=-2n+4$

(2) 初項が -3 、公比が 3 の等比数列であるから $a_n=-3 \cdot 3^{n-1}=-3^n$

(3) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると $b_n=-3n^2-n$

$$\begin{aligned} \text{よって、} n \geq 2 \text{ のとき } a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-3k^2 - k) = 1 + (-3) \cdot \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1) - \frac{1}{2} n(n-1) \\ &= 1 - \frac{1}{2} n(n-1)\{(2n-1)+1\} = 1 - n^2(n-1) = -n^3 + n^2 + 1 \end{aligned}$$

また、 $n=1$ のとき $a_1=-1^3+1^2+1=1$ よって、 $a_n=-n^3+n^2+1$ は $n=1$ のときも成り立つ。

以上から $a_n=-n^3+n^2+1$

2 $a_{n+1}=pa_n+q$ 型の漸化式

$a_1=1, a_{n+1}=3a_n-1$ ($n=1, 2, 3, \dots$) で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

要 点

〈注意〉特性方程式を用いる解法は「[例題] 数列」で扱っている。ここでは、別の解法を紹介する。

$a_1=a$ とする。与えられた漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ と、 n を 1 つ増やした $a_{n+2}=pa_{n+1}+q$ の 2 式を作って

辺々を引くと $a_{n+2}-a_{n+1}=p(a_{n+1}-a_n)$ ここで、 $a_{n+1}-a_n=b_n$ とおけば、 $b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}$ より

$b_{n+1}=pb_n$ また、 $b_1=a_2-a_1=(pa_1+q)-a_1=q-(1-p)a$ より、等比数列 $\{b_n\}$ の一般項が求まる。

$a_{n+1}-a_n=b_n$ から、数列 $\{a_n\}$ の階差数列が $\{b_n\}$ であるので、一般項 a_n が求まる。

解答

与えられた漸化式 $a_{n+1}=3a_n-1$ と、 n を 1 つ増やした $a_{n+2}=3a_{n+1}-1$ の辺々を引くと

$$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n) \quad \text{ここで、} a_{n+1}-a_n=b_n \text{ とおけば、} b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1} \text{ より}$$

$$b_{n+1}=3b_n \quad \text{また、} b_1=a_2-a_1=(3 \cdot a_1-1)-a_1=(3 \cdot 1-1)-1=1 \text{ より} \quad b_n=3^{n-1}$$

$a_{n+1}-a_n=b_n$ から、数列 $\{a_n\}$ の階差数列が $\{b_n\}$ であるので、 $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1} = 1 + \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{1}{2}$$

また、 $n=1$ のとき $a_1 = \frac{1}{2} \cdot 3^{1-1} + \frac{1}{2} = 1$ よって、 $a_n = \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{1}{2}$ は $n=1$ のときも成り立つ。

以上から $a_n = \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{1}{2}$

別解 特性方程式 $\alpha=3\alpha-1$ から $\alpha=\frac{1}{2}$ よって、 $a_{n+1}=3a_n-1$ は $a_{n+1}-\frac{1}{2}=3\left(a_n-\frac{1}{2}\right)$

と変形できる。 $a_n-\frac{1}{2}=b_n$ とおくと、 $a_{n+1}-\frac{1}{2}=b_{n+1}$ であるから $b_{n+1}=3b_n$

ここで、 $b_1=a_1-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ より $b_n=\frac{1}{2} \cdot 3^{n-1}$ したがって $a_n=\frac{1}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{1}{2}$

3 $a_{n+1}=pa_n+qn+r$ 型の漸化式

$a_1=0$, $a_{n+1}=2a_n+3n-4$ ($n=1, 2, 3, \dots$) で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

要 点

$a_{n+1}=pa_n+qn+r$ ($n=1, 2, 3, \dots$) 型の漸化式では、「1 つ増やして辺々を引く」方法で例題 **2** の形に変形でき、一般項を求めることができる。

解答

与えられた漸化式 $a_{n+1}=2a_n+3n-4$ と、 n を 1 つ増やした $a_{n+2}=2a_{n+1}+3(n+1)-4$ の辺々を引くと

$$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)+3$$

ここで、 $a_{n+1}-a_n=b_n$ とおけば、 $b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}$ より $b_{n+1}=2b_n+3$

特性方程式 $\alpha=2\alpha+3$ から $\alpha=-3$ よって、 $b_{n+1}=2b_n+3$ は $b_{n+1}+3=2(b_n+3)$ と変形できる。

$b_n+3=c_n$ とおくと、 $b_{n+1}+3=c_{n+1}$ であるから $c_{n+1}=2c_n$

ここで、 $c_1=b_1+3=(a_2-a_1)+3=\{(2a_1+3 \cdot 1-4)-a_1\}+3=\{(2 \cdot 0+3 \cdot 1-4)-0\}+3=2$ より

$$c_n=2^n \quad \text{これから} \quad b_n=2^n-3$$

$a_{n+1}-a_n=b_n$ から、数列 $\{a_n\}$ の階差数列が $\{b_n\}$ であるので、 $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2^k - 3) = 0 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} - 3(n - 1) = 2^n - 3n + 1$$

また、 $n=1$ のとき $a_1=2^1-3 \cdot 1+1=0$ よって、 $a_n=2^n-3n+1$ は $n=1$ のときも成り立つ。

以上から $a_n=2^n-3n+1$

4 $a_{n+1}=pa_n+qr^n$ 型の漸化式

$a_1=3$, $a_{n+1}=2a_n+2\cdot 3^n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

要 点

$a_{n+1}=pa_n+qr^n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) 型の漸化式では、2通りの一般項の求め方がある。

- ・両辺を r^{n+1} で割る $\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{r^{n+1}} = \frac{p}{r} \cdot \frac{a_n}{r^n} + \frac{q}{r}$... $b_n = \frac{a_n}{r^n}$ とおけば例題**2**の形になる。
- ・両辺を p^{n+1} で割る $\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} = \frac{a_n}{p^n} + \frac{q}{p} \cdot \left(\frac{r}{p}\right)^n$... $b_n = \frac{a_n}{p^n}$ とおけば階差数列の形になる。

解答その1

与えられた漸化式 $a_{n+1} = 2a_n + 2 \cdot 3^n$ の両辺を 3^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} + \frac{2}{3}$

ここで、 $\frac{a_n}{3^n} = b_n$ とおけば、 $b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}$ より $b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{2}{3}$

特性方程式 $\alpha = \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{3}$ から $\alpha = 2$ よって、 $b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{2}{3}$ は $b_{n+1} - 2 = \frac{2}{3}(b_n - 2)$ と変形できる。

$b_n - 2 = c_n$ とおくと、 $b_{n+1} - 2 = c_{n+1}$ であるから $c_{n+1} = \frac{2}{3}c_n$

ここで、 $c_1 = b_1 - 2 = \frac{a_1}{3^1} - 2 = \frac{3}{3} - 2 = -1$ より $c_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ これから $b_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 2$

$\frac{a_n}{3^n} = b_n$ から $a_n = 3^n \left\{ -\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 2 \right\}$ したがって $a_n = 2 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^{n-1}$

解答その2

与えられた漸化式 $a_{n+1} = 2a_n + 2 \cdot 3^n$ の両辺を 2^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \left(\frac{3}{2}\right)^n$

ここで、 $\frac{a_n}{2^n} = b_n$ とおけば、 $b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}$ より $b_{n+1} = b_n + \left(\frac{3}{2}\right)^n$

$b_1 = \frac{a_1}{2^1} = \frac{3}{2}$ であるから、 $n \geq 2$ のとき $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^k = \frac{3}{2} + \frac{\frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1 \right\}}{\frac{3}{2} - 1} = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - \frac{3}{2}$

また、 $n=1$ のとき $b_1 = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{1-1} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

よって、 $b_n = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - \frac{3}{2}$ は $n=1$ のときも成り立つ。

$\frac{a_n}{2^n} = b_n$ から $a_n = 2^n \left\{ 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - \frac{3}{2} \right\}$ したがって $a_n = 2 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^{n-1}$

5 隣接3項間漸化式

次の条件によって定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1=2, a_2=3, a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=0$

(2) $a_1=1, a_2=2, a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$

要 点

$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$ ($n=1, 2, 3, \dots$) 型の漸化式では、以下のように一般項を求める。

a_{n+2} を x^2 , a_{n+1} を x , a_n を1と置き換えた方程式 $x^2+px+q=0$ (特性方程式その2) を作る。

この2次方程式の解を α, β とすると、解と係数の関係により、 $\alpha+\beta=-p, \alpha\beta=q$ であるから、 $x^2+px+q=0$ は $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ と変形できる。

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=x^2-\alpha x-\beta x+\alpha\beta=0 \text{ より } x^2-\alpha x=\beta x-\alpha\beta$$

元に戻すと $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ となり、 $a_{n+1}-\alpha a_n=b_n$ とおくと隣接2項間漸化式に変形できる。

解答

(1) 特性方程式 $x^2-7x+12=0$ から $(x-3)(x-4)=0$ より $x=3, 4$

$\alpha=3, \beta=4$ のとき、 $a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=0$ は $a_{n+2}-3a_{n+1}=4(a_{n+1}-3a_n)$ と変形できる。

$a_{n+1}-3a_n=b_n$ とおくと $b_{n+1}=4b_n$ となり $b_1=a_2-3a_1=3-3\cdot 2=-3$ から $b_n=-3\cdot 4^{n-1}$

よって $a_{n+1}-3a_n=-3\cdot 4^{n-1} \dots\dots ①$

また、 $\alpha=4, \beta=3$ とすると、 $a_{n+2}-7a_{n+1}+12a_n=0$ は

$a_{n+2}-4a_{n+1}=3(a_{n+1}-4a_n)$ と変形できる。

$a_{n+1}-4a_n=c_n$ とおくと $c_{n+1}=3c_n$ となり

$c_1=a_2-4a_1=3-4\cdot 2=-5$ から $c_n=-5\cdot 3^{n-1}$

よって $a_{n+1}-4a_n=-5\cdot 3^{n-1} \dots\dots ②$

①-②から $a_n=5\cdot 3^{n-1}-3\cdot 4^{n-1}$

(2) 特性方程式 $x^2-6x+9=0$ から $(x-3)^2=0$ より $x=3$

$\alpha=\beta=3$ と考えて、 $a_{n+2}-6a_{n+1}+9a_n=0$ は $a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)$ と変形できる。

$a_{n+1}-3a_n=b_n$ とおくと $b_{n+1}=3b_n$ となり $b_1=a_2-3a_1=2-3\cdot 1=-1$ から $b_n=-3^{n-1}$

よって $a_{n+1}-3a_n=-3^{n-1}$

両辺を 3^{n+1} で割ると $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{a_n}{3^n}=-\frac{1}{9}$

$c_n=\frac{a_n}{3^n}$ とおくと $c_{n+1}=c_n-\frac{1}{9}$ であるから、数列 $\{c_n\}$ は、

初項が $c_1=\frac{a_1}{3^1}=\frac{1}{3}$, 公差が $-\frac{1}{9}$ の等差数列である。よって $c_n=\frac{1}{3}+(n-1)\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)=-\frac{1}{9}n+\frac{4}{9}$

$\frac{a_n}{3^n}=-\frac{1}{9}n+\frac{4}{9}$ から $a_n=3^n\left(-\frac{1}{9}n+\frac{4}{9}\right)$ したがって $a_n=(4-n)\cdot 3^{n-2}$

①を例題4の形の漸化式とみて一般項を求めることもできるが、 $\alpha\neq\beta$ のとき、 α と β を入れかえて a_{n+1}, a_n の関係を2通りに表し、 a_{n+1} を消去する方が計算は楽である。

$\alpha=\beta$ のときは(1)の解法が使えないため、例題4の形の漸化式とみて一般項を求める。