

図形と方程式

1 内分・外分・三角形の重心

(1) 数直線上の2点 $A(-5)$, $B(2)$ を結ぶ線分 AB について、次の点の座標を求めよ。

- ① 1:2 に内分する点 ② 中点 ③ 1:2 に外分する点

(2) 座標平面上の2点 $A(-1, 3)$, $B(2, -1)$ を結ぶ線分 AB について、次の点の座標を求めよ。

- ① 3:2 に内分する点 ② 3:2 に外分する点

(3) 座標平面上の3点 $A(-1, 3)$, $B(2, -1)$, $C(5, 0)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の重心の座標を求めよ。

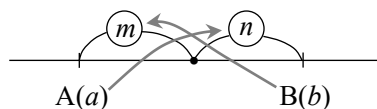
要 点

内分点・外分点

2点 $A(a)$, $B(b)$ を結ぶ線分 AB に対して

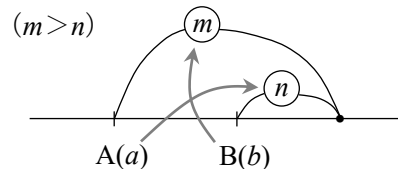
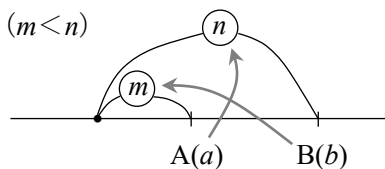
・ $m:n$ に内分する点の座標 $\frac{na+mb}{m+n}$

- ・ 分母は比の和
- ・ 分子は右の図のように掛けた積の和



・ $m:n$ に外分する点の座標 $\frac{-na+mb}{m-n}$

内分における
 n を $-n$ に
置き換えると得られる。

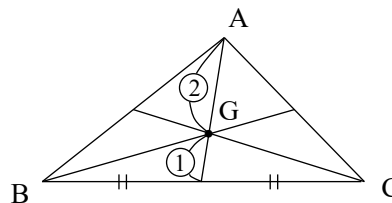


重心の座標

3点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ を頂点とする

$\triangle ABC$ の重心 G の座標は

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3} \right)$$

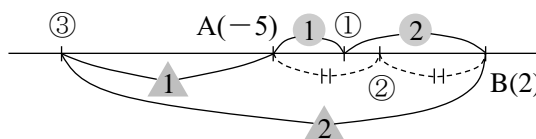


解答

(1) ① $\frac{2 \cdot (-5) + 1 \cdot 2}{1+2} = -\frac{8}{3}$

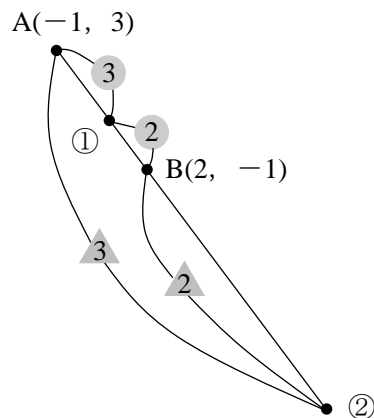
② $\frac{-5+2}{2} = -\frac{3}{2}$

③ $\frac{2 \cdot (-5) + (-1) \cdot 2}{-1+2} = -12$

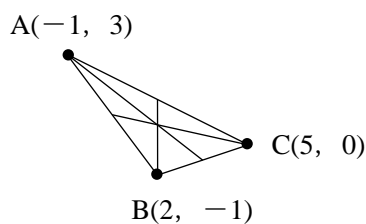


(2) ① $\left(\frac{2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2}{3+2}, \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1)}{3+2}\right)$ から $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

② $\left(\frac{(-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 2}{3-2}, \frac{(-2) \cdot 3 + 3 \cdot (-1)}{3-2}\right)$ から $(8, -9)$



(3) $\left(\frac{-1+2+5}{3}, \frac{3-1+0}{3}\right)$ から $\left(2, \frac{2}{3}\right)$



2 2点間の距離

次の座標平面上の2点間の距離を求めよ。

(1) (0, 0), (2, -4)

(2) (-1, -2), (2, -4)

要 点

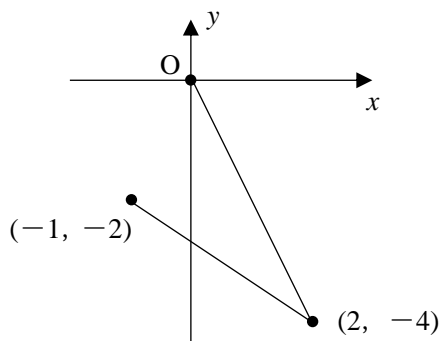
2点間の距離

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ のとき $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

解答

(1) $\sqrt{(2-0)^2 + (-4-0)^2} = 2\sqrt{5}$

(2) $\sqrt{\{2-(-1)\}^2 + \{-4-(-2)\}^2} = \sqrt{13}$



3 直線の方程式

次の直線の方程式を求めよ。

(1) 2点(7, 3), (-1, -5)を通る直線

(2) 点(7, 3)を通り、直線 $3x + y - 3 = 0$ に垂直な直線

要 点

2 点を通る直線の方程式

2 点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ を通る直線の方程式は

(i) $x_1 \neq x_2$ のとき $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$ (ii) $x_1 = x_2$ のとき $x = x_1$

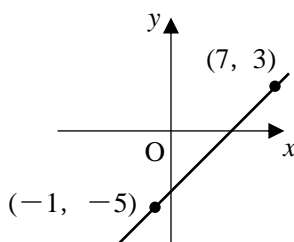
2 直線の平行条件・垂直条件

2 直線 $y = mx + n$, $y = m'x + n'$ が

(i) 平行 $\Leftrightarrow m = m'$ (ii) 垂直 $\Leftrightarrow mm' = -1$

解答

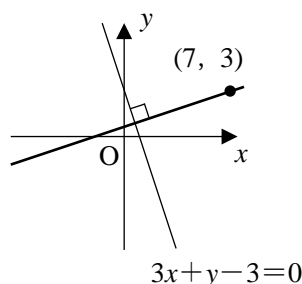
(1) $y - 3 = \frac{-5 - 3}{-1 - 7} (x - 7)$ から $y = x - 4$



(2) 直線 $3x + y - 3 = 0$ の傾きは $y = -3x + 3$ より -3 であるから、求める直線の傾き m は

$-3 \cdot m = -1$ から $m = \frac{1}{3}$

したがって $y - 3 = \frac{1}{3} (x - 7)$ から $y = \frac{1}{3} x + \frac{2}{3}$



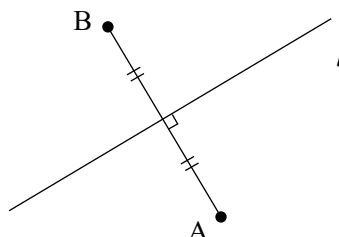
4 直線に関して対称な点

直線 $l: x - y + 1 = 0$ に関して、点 $A(3, 0)$ と対称な点 B の座標を求めよ。

要 点

2 点 A , B が直線 l に関して対称であるのは、次の(i), (ii)がともに成り立つときです。

- (i) 直線 AB は直線 l に垂直
- (ii) 線分 AB の中点は直線 l 上にある。



解答

点 B の座標を (p, q) とする。

(i) 直線 l の傾きは、 $y=x+1$ より 1

直線 AB の傾きは $\frac{q-0}{p-3}$ であり、直線 AB は

直線 l に垂直であるから $\frac{q}{p-3} \times 1 = -1$

すなわち $q = -p + 3$ ……①

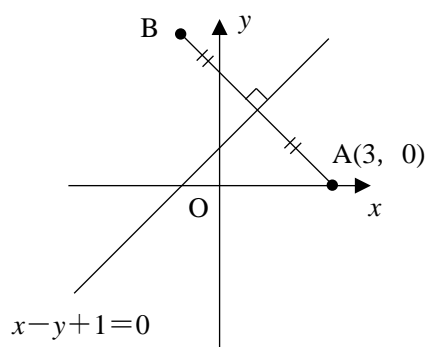
(ii) 線分 AB の中点は $\left(\frac{3+p}{2}, \frac{0+q}{2}\right)$

これが直線 l 上にあるから $\frac{3+p}{2} - \frac{q}{2} + 1 = 0$

すなわち $p - q = -5$ ……②

①, ②を連立させて解くと $p = -1, q = 4$

したがって、点 B の座標は $(-1, 4)$



5 点と直線の距離

(1) 次の点と直線の距離を求めよ。

① $(0, 0), 7x - 6y + 5 = 0$

② $(1, 1), y = 3x + 3$

(2) 座標平面上の3点 $A(0, 1), B(4, -2), C(3, 2)$ について、次の問いに答えよ。

① 直線 AB の方程式を求めよ。

② 線分 AB の長さを求めよ。

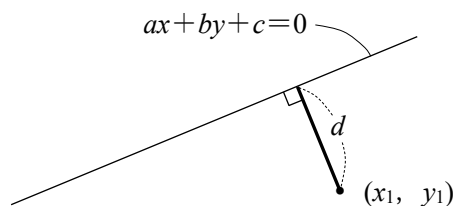
③ $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

要 点

点と直線の距離

直線 $ax + by + c = 0$ と点 (x_1, y_1) の距離 d は

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



解答

(1) ① 求める距離を d とすると $d = \frac{|7 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 5|}{\sqrt{7^2 + (-6)^2}} = \frac{5}{\sqrt{85}} = \frac{\sqrt{85}}{17}$

② 直線 $3x - y + 3 = 0$ と点 $(1, 1)$ の距離 d は $d = \frac{|3 \cdot 1 - 1 + 3|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

(2) ① $y-1 = \frac{-2-1}{4-0}x$ から $y = -\frac{3}{4}x+1$

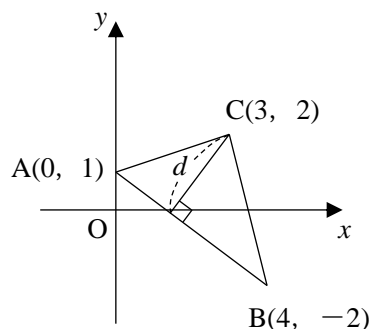
② $AB = \sqrt{(4-0)^2 + (-2-1)^2} = 5$

③ $y = -\frac{3}{4}x+1$ を変形すると $3x+4y-4=0$

直線 $3x+4y-4=0$ と点 $C(3, 2)$ の距離 d は

$$d = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{13}{5}$$

以上から $\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{13}{5} = \frac{13}{2}$



6 円の方程式

- (1) $x^2+y^2-2x-6y+1=0$ はどんな図形を表すか。
- (2) 2点 $(-2, -3)$, $(6, 5)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ。
- (3) 3点 $(1, 2)$, $(-2, 1)$, $(4, -3)$ を通る円の方程式を求めよ。

要 点

円の方程式

中心 (a, b) , 半径 r の円の方程式は $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

また一般に, 円の方程式は l, m, n を定数として次の形で表される。

$$x^2+y^2+lx+my+n=0$$

解答

(1) $x^2+y^2-2x-6y+1=0$ を変形すると, $x^2-2x+1+y^2-6y+9-1-9+1=0$ から

$$(x-1)^2+(y-3)^2=9$$

よって, **中心(1, 3), 半径3の円**

(2) 直径の midpoint が円の中心であるから

$$\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{-3+5}{2} \right)$$

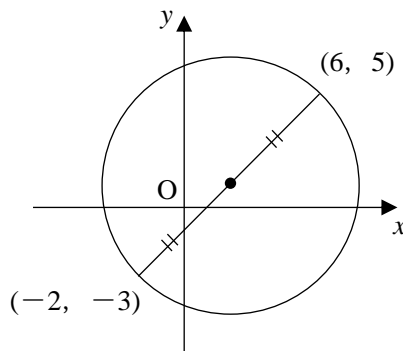
すなわち $(2, 1)$

また, 円の半径を r とすると, r^2 は
2点 $(-2, -3)$, $(2, 1)$ の距離の2乗
であるから

$$r^2 = \{2 - (-2)\}^2 + \{1 - (-3)\}^2 = 32$$

よって, 求める円の方程式は

$$(x-2)^2+(y-1)^2=32$$



- (3) 求める円の方程式を、 $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおく。この円は3点(1, 2), (-2, 1), (4, -3)を通るから

$$\begin{cases} 1+4+l+2m+n=0 \\ 4+1-2l+m+n=0 \\ 16+9+4l-3m+n=0 \end{cases} \quad \text{これらを整理すると} \quad \begin{cases} l+2m+n=-5 & \dots\dots① \\ -2l+m+n=-5 & \dots\dots② \\ 4l-3m+n=-25 & \dots\dots③ \end{cases}$$

①-②から $3l+m=0 \dots\dots④$, ①-③から $-3l+5m=20 \dots\dots⑤$

④, ⑤を連立させて解くと $m=\frac{10}{3}, l=-\frac{10}{9}$ ①から $n=-5+\frac{10}{9}-\frac{20}{3}=-\frac{95}{9}$

以上から、求める円の方程式は、 $x^2+y^2-\frac{10}{9}x+\frac{10}{3}y-\frac{95}{9}=0$ より $9x^2+9y^2-10x+30y-95=0$

7 円と直線の共有点

- (1) 円 $x^2+y^2+6x-4y+9=0$, 直線 $x+y-1=0$ との共有点の座標を求めよ。
 (2) a を実数とする。円 $x^2+y^2=4$ と直線 $y=2x+a$ が接するときの a の値をすべて求めよ。

要 点

円の方程式と直線の方程式から、1文字(例えば y) を消去して得られる2次方程式から、共有点の座標や共有点の個数を調べることができます。

共有点の個数など、円と直線の位置関係のみで答えが求まる問題では、点と直線の距離の公式を用いれば、はやく答えを求めることができます。

解答

(1) $x^2+y^2+6x-4y+9=0 \dots\dots①$, $x+y-1=0 \dots\dots②$

とする。②を変形すると $y=-x+1$ これを①に代入すると

$$x^2+(-x+1)^2+6x-4(-x+1)+9=0 \quad x^2+x^2-2x+1+6x+4x-4+9=0$$

$$2x^2+8x+6=0 \quad 2(x+1)(x+3)=0 \quad x=-1, -3$$

②から、 $x=-1$ のとき $y=2$, $x=-3$ のとき $y=4$

よって、求める共有点の座標は $(-1, 2), (-3, 4)$

(2) 円 $x^2+y^2=4$ の中心(0, 0)と、直線 $2x-y+a=0$ の距離 d は $d=\frac{|a|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|a|}{\sqrt{5}}$

円の半径と d が一致するとき、円と直線は接する。よって、 $d=2$ となればよい。

$$\frac{|a|}{\sqrt{5}}=2 \text{ から } a=\pm 2\sqrt{5}$$

別解 $x^2+y^2=4$ に $y=2x+a$ を代入すると $x^2+(2x+a)^2=4$ $5x^2+4ax+a^2-4=0$

この2次方程式が重解をもつとき、円と直線は接する。2次方程式の判別式を D とすると

$$D=(4a)^2-4\cdot 5\cdot (a^2-4)=-4a^2+80$$

$D=0$ となるのは、 $-4a^2+80=0$ のときであるから、求める a の値は $a=\pm 2\sqrt{5}$

8 円の接線の方程式

- (1) ① 円 $x^2+y^2=9$ 上の点 $(1, 2\sqrt{2})$ における接線の方程式を求めよ。
 ② 円 $x^2+y^2-2x-8y=0$ 上の点 $(2, 0)$ における接線の方程式を求めよ。
 (2) 点 $(-1, 3)$ を通り、円 $x^2+y^2=1$ に接する直線の方程式を求めよ。

要 点

(1) 円の接線の方程式

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 (a, b) における接線の方程式は $ax+by=r^2$

一般に、円 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ 上の点 (a, b) における接線の方程式は

$$(a-p)(x-p)+(b-q)(y-q)=r^2$$

- (2) 円外の点から円に引いた接線の方程式を求めるとき、まず、接点を (a, b) などに設定し、「円上の点 (a, b) における接線が、条件にある円外の点を通る。」と考えます。

解答

(1) ① $x+2\sqrt{2}y=9$

② $x^2+y^2-2x-8y=0$ を変形すると $(x-1)^2+(y-4)^2=17$

よって、 $(x-1)^2+(y-4)^2=17$ 上の点 $(2, 0)$ における接線の方程式は

$$(2-1)(x-1)+(0-4)(y-4)=17 \quad \text{すなわち} \quad x-4y=2$$

- (2) まず、求める直線と円の接点を (a, b) とおく。

よって、接線の方程式は $ax+by=1$

これが、 $(-1, 3)$ を通るから $-a+3b=1$ ……①

また、 (a, b) は円上の点であるから $a^2+b^2=1$ ……②

①を変形すると $a=3b-1$

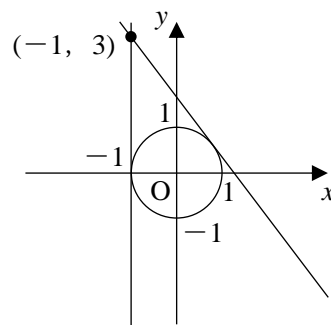
これを②に代入すると $(3b-1)^2+b^2=1$

整理すると、 $2b(5b-3)=0$ から $b=0, \frac{3}{5}$

①から、 $b=0$ のとき $a=-1$, $b=\frac{3}{5}$ のとき $a=\frac{4}{5}$

求める接線の方程式は $-x=1, \frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y=1$ から

$$x=-1, 4x+3y=5$$



9 2つの円の位置関係

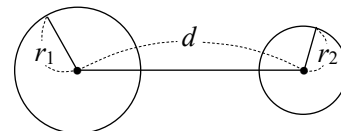
2つの円 $x^2+y^2=r^2$, $(x+4)^2+(y-3)^2=4$ が共有点をもつように、定数 r の値の範囲を定めよ。
 ただし、 $r>0$ とする。

要 点

2つの円の位置関係は、2つの円の半径と中心間の距離の関係を調べます。

半径がそれぞれ $r_1, r_2 (r_1 > r_2)$ である2つの円の中心間の距離を d とすると

- | | |
|----------------|-----------------------------|
| (1) 互いに外部にある | $d > r_1 + r_2$ |
| (2) 外接する | $d = r_1 + r_2$ |
| (3) 2点で交わる | $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$ |
| (4) 一方が他方に内接する | $d = r_1 - r_2$ |
| (5) 一方が他方を含む | $d < r_1 - r_2$ |



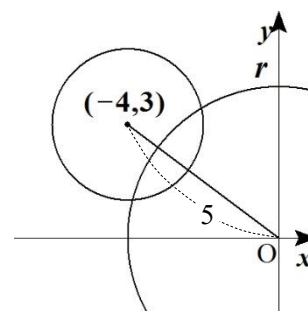
解答

円 $x^2 + y^2 = r^2$ は、中心 $(0, 0)$, 半径 r

円 $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 4$ は、中心 $(-4, 3)$, 半径 2

2つの円の中心間の距離を d とすると $d = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$

- (i) 外接するとき $5 = r + 2$ から $r = 3$
 - (ii) 一方が他方と内接するとき $5 = r - 2$ から $r = 7$
 - (iii) 2点で交わる時 $r - 2 < 5 < r + 2$ から $3 < r < 7$
- (i)~(iii)から、2つの円が共有点をもつ r の値の範囲は $3 \leq r \leq 7$



10 軌跡と方程式

2点 $A(-2, 0)$, $B(4, 0)$ からの距離の比が $2 : 1$ である点の軌跡を求めよ。

要 点

軌跡を求める手順

1 条件を満たす点 P の座標を (x, y) とおき、条件から x, y の関係式を求めて、その方程式が表す図形 F 上に点 P があることを示す。

2 図形 F 上の任意の点が、条件を満たしていることを示す。

(注意) 1の証明から2が明らかな場合、2の証明を省略してもよい。

2 定点からの距離の比が一定である点の軌跡

2 定点 A, B からの距離の比が $m : n$ ($m > 0, n > 0, m \neq n$) である点の軌跡は、線分 AB を $m : n$ に内分する点と外分する点を直径の両端とする円である。この円を **アポロニウスの円** という。

また、 $m = n$ のとき、軌跡は線分 AB の垂直二等分線である。

解答

条件を満たす点を $P(x, y)$ とすると

$$AP : BP = 2 : 1 \text{ から } AP = 2BP$$

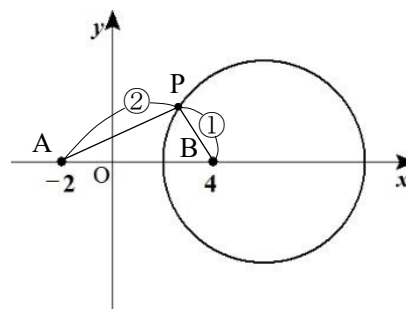
$$\text{よって } AP^2 = 4BP^2$$

$$\text{したがって } \{x - (-2)\}^2 + \{y - 0\}^2 = 4\{(x - 4)\}^2 + \{y - 0\}^2$$

整理すると, $3x^2 - 36x + 60 + 3y^2 = 0$ から

$$(x - 6)^2 + y^2 = 16$$

以上から, 求める点 P の軌跡は, 点 $(6, 0)$ を中心とし, 半径が 4 の円である。



補足 線分 AB を $2 : 1$ に内分する点 $\left(\frac{1 \cdot (-2) + 2 \cdot 4}{2 + 1}, 0\right)$ すなわち $(2, 0)$

線分 AB を $2 : 1$ に外分する点 $\left(\frac{(-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 4}{2 - 1}, 0\right)$ すなわち $(10, 0)$

は, 求めた円の直径の両端になっている。

1 1 媒介変数と軌跡

実数 t の値が変化するとき, 円 $x^2 + y^2 + \frac{5}{4}t^2 - (x + 2y)t - 1 = 0$ の中心の軌跡を求めよ。

要 点

まず, 円の中心の座標 (x, y) を求めます。 x, y は t の式で表されるから, t を消去して, x, y の関係式を導きます。これが求める軌跡となります。

解答

$$x^2 + y^2 + \frac{5}{4}t^2 - (x + 2y)t - 1 = 0 \text{ を変形すると } \left(x - \frac{t}{2}\right)^2 + (y - t)^2 = 1$$

円の中心の座標を (x, y) とすると

$$x = \frac{t}{2}, \quad y = t$$

この2式から t を消去すると, $t = 2x$ より $y = 2x$

よって, 求める軌跡は **直線 $y = 2x$** である。

1 2 不等式の表す領域

次の不等式の表す領域を図示せよ。

$$(1) \quad 3x - 2y + 6 > 0 \qquad (2) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4 \\ x - 2y + 2 > 0 \end{cases}$$

要 点

直線と領域

直線 $y=mx+n$ を l とする。

不等式 $y>mx+n$ の表す領域は、直線 l の上側

不等式 $y<mx+n$ の表す領域は、直線 l の下側

(注意) $y\geq mx+n$ のように、等号を含むときは境界線である直線 $y=mx+n$ 上の点を含む。他の図形の場合も同様である。

一般に、 $y>f(x)$ の表す領域は、曲線 $y=f(x)$ の上側 $y<f(x)$ の表す領域は、曲線 $y=f(x)$ の下側

円と領域

円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を C とする。

不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ の表す領域は、 C の内部

不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$ の表す領域は、 C の外部

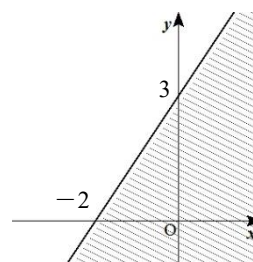
連立不等式の表す領域

連立不等式の表す領域は、それぞれの不等式の表す領域の共通部分である。

解答

(1) $3x-2y+6>0$ を変形すると $y<\frac{3}{2}x+3$

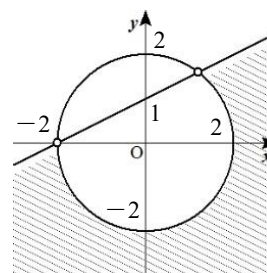
よって、求める領域は右の図の斜線部分である。
ただし、境界線を含まない。



(2) $x-2y+2>0$ を変形すると $y<\frac{1}{2}x+1$

よって、求める領域は円 $x^2+y^2=4$ の外部と
直線 $y=\frac{1}{2}x+1$ の下側の共通部分で、右の図
の斜線部分である。

ただし、境界線のうち円周は含むが直線は含まない。



13 領域と最大・最小

x, y が 3 つの不等式 $4x-y-2\geq 0, 2x+y-7\leq 0, x+2y-5\geq 0$ を満たすとき、次の値を求めよ。

(1) $x+y$ の最大値, 最小値

(2) $(x-2)^2+y^2$ の最大値, 最小値

要 点

まず、条件の連立不等式の表す領域 D を図示します。

次に求める式の値を、 $f(x, y)=k$ とおき、領域 D と曲線 $f(x, y)=k$ が共有点をもつような k の値の範囲を調べ、 k の最大値, 最小値を求めます。

解答

(1) 与えられた連立不等式の表す領域を D とする。

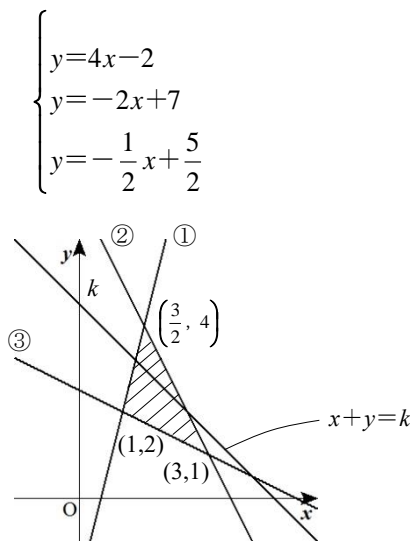
$$\begin{cases} 4x-y-2=0 & \dots\dots ① \\ 2x+y-7=0 & \dots\dots ② \\ x+2y-5=0 & \dots\dots ③ \end{cases} \text{をそれぞれ変形すると} \begin{cases} y=4x-2 \\ y=-2x+7 \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \end{cases}$$

であり、①と②の交点は $(\frac{3}{2}, 4)$

②と③の交点は $(3, 1)$

③と①の交点は $(1, 2)$

であるから、 D は右の図の斜線部分である。



ここで、 $x+y=k$ ……④とおくと、

$y=-x+k$ と変形できるから、④は傾きが -1 、 y 切片が k の直線を表す。

この直線④が領域 D と共有点をもつような k の値の最大値と最小値を求めればよい。

図から、 k は④が $(\frac{3}{2}, 4)$ を通るとき最大となり、 $(1, 2)$ を通るとき最小となる。

よって、 $x+y$ は $x=\frac{3}{2}$ 、 $y=4$ のとき最大値 $\frac{3}{2}+4=\frac{11}{2}$ 、

$x=1$ 、 $y=2$ のとき最小値 $1+2=3$ をとる。

(2) $(x-2)^2+y^2=k$ ……⑤とおくと、⑤は

中心 $(2, 0)$ 、半径 \sqrt{k} の円を表す。

(1)から、 D は右の図の斜線部分である。

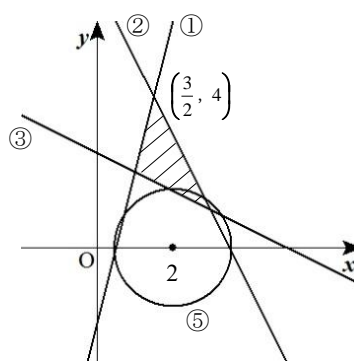
よって、図から k は⑤が $(\frac{3}{2}, 4)$ を通る

とき最大となり、円⑤と直線③が接する

とき最小となる。

直線③を変形すると、 $x=-2y+5$ である

から、これを⑤に代入すると $(-2y+3)^2+y^2=k$



$$4y^2-12y+9+y^2=k$$

$$5y^2-12y+9-k=0$$

これが重解をもつとき $(-12)^2-4\cdot 5(9-k)=0$

$$144-180+20k=0$$

$$k=\frac{9}{5}$$

このとき、 $\frac{1}{5}(25y^2-60y+36)=\frac{1}{5}(5y-6)^2=0$ から $y=\frac{6}{5}$ 、③から $x=\frac{13}{5}$

したがって、 $(x-2)^2+y^2$ は $x=\frac{3}{2}$ 、 $y=4$ のとき最大値 $(\frac{3}{2}-2)^2+4^2=\frac{65}{4}$ 、

$x=\frac{13}{5}$ 、 $y=\frac{6}{5}$ のとき最小値 $\frac{9}{5}$ をとる。