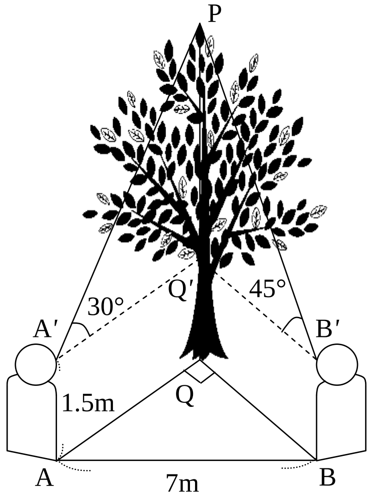
図形と計量

1　直角三角形と三角比

木の先端を P，根元を Q とする。A 地点の目の位置 A′ から木の先端への仰角が 30°，A から 7m 離れた∠AQB＝90° となる B 地点の目の位置 B′ から木の先端への仰角が 45° であるとき，木の高さを求めよ。ただし，目の高さを 1.5m とし，Q′ を右の図のように定める。



要　点

・PQ′ ＝x とおき，A′Q′, B′Q′ を x を用いて表し，$\dfrac{PQ'}{A'Q'}=\tan 30°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\dfrac{PQ'}{B'Q'}=\tan 45°=1$ を利用します。

・△A′Q′B′ において，三平方の定理を用いて x を求めます。

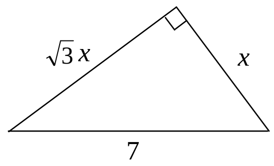
解答

PQ′ ＝x とおく。∠PA′Q′ ＝30°より　$\dfrac{PQ'}{A'Q'}=\tan 30°$，$\tan 30°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるので　A′Q′ ＝$\sqrt{3}\,x$

∠PB′Q′ ＝45°より　$\dfrac{PQ'}{B'Q'}=\tan 45°$，$\tan 45°=1$ であるので　B′Q′ ＝x

△A′Q′B′ は直角三角形なので，三平方の定理により

$$(\sqrt{3}\,x)^2+x^2=7^2 \qquad x^2=\frac{49}{4}$$



$x>0$ より　$x=\dfrac{7}{2}=3.5$

したがって，木の高さは　3.5＋1.5＝**5m**

2　90° －θ，180° －θの三角比

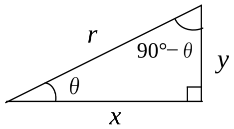
(1)　次の三角比を 45°より小さい角の三角比で表せ。

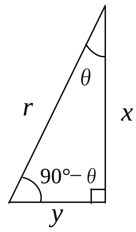
①　sin70°　　②　cos165°　　③　tan130°

(2)　0° ＜θ＜90° のとき，sin(90° ＋θ)，cos(90° ＋θ)，tan(90° ＋θ)を，θの三角比で表せ。

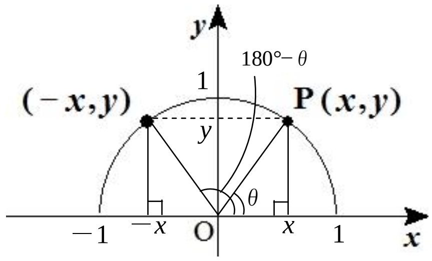
要　点

$$\begin{cases} \sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta \\ \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta \\ \tan(90^\circ - \theta) = \dfrac{1}{\tan\theta} \end{cases}$$





$$\begin{cases} \sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta \\ \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta \\ \tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta \end{cases}$$



解答

(1)　①　$90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$ であるから　　$\sin 70^\circ = \sin(90^\circ - 20^\circ) = \mathbf{\cos 20^\circ}$

②　$165^\circ = 180^\circ - 15^\circ$ であるから　　$\cos 165^\circ = \cos(180^\circ - 15^\circ) = \mathbf{-\cos 15^\circ}$

③　$130^\circ = 180^\circ - 50^\circ$ であり，$50^\circ = 90^\circ - 40^\circ$ であるから

$$\tan 130^\circ = \tan(180^\circ - 50^\circ) = -\tan 50^\circ = -\tan(90^\circ - 40^\circ) = \mathbf{-\frac{1}{\tan 40^\circ}}$$

(2)　$0^\circ < \theta < 90^\circ$ のとき，$90^\circ + \theta$ は鈍角になるから $180^\circ - (90^\circ + \theta)$ を考える。

$180^\circ - (90^\circ + \theta) = 90^\circ - \theta$ であるから　$\sin(90^\circ + \theta) = \sin\{180^\circ - (90^\circ + \theta)\} = \sin(90^\circ - \theta) = \mathbf{\cos\theta}$

$$\cos(90^\circ + \theta) = -\cos\{180^\circ - (90^\circ + \theta)\} = -\cos(90^\circ - \theta) = \mathbf{-\sin\theta}$$

$$\tan(90^\circ + \theta) = -\tan\{180^\circ - (90^\circ + \theta)\} = -\tan(90^\circ - \theta) = \mathbf{-\frac{1}{\tan\theta}}$$

3　三角比の相互関係

(1)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ とする。$\cos\theta = \dfrac{2}{7}$ のとき，$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

(3)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\tan\theta = -2$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。

要　点

次の三角比の相互関係を用います。

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。ただし，$\tan\theta$ では $\theta \neq 90^\circ$ とする。

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

解答

(1)　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\dfrac{2}{7}\right)^2=\dfrac{45}{49}$　　$\sin\theta>0$ であるから　$\boldsymbol{\sin\theta=\dfrac{3\sqrt{5}}{7}}$

　また　$\boldsymbol{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{3\sqrt{5}}{7}\div\dfrac{2}{7}=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{5}}{2}}$

(2)　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{8}{9}$

　(ⅰ)　$\cos\theta>0$ のとき

　　$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{8}{9}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{3}\div\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

　(ⅱ)　$\cos\theta<0$ のとき

　　$\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{8}{9}}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{3}\div\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

　(ⅰ), (ⅱ)から　$\boldsymbol{(\cos\theta,\ \tan\theta)=\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right),\ \left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)}$

(3)　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から　　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+(-2)^2=5$　　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{5}$

　$0°\leqq\theta\leqq180°$, $\tan\theta=-2<0$ であるから　$90°<\theta<180°$　　よって　$\cos\theta<0$

　したがって　$\boldsymbol{\cos\theta}=-\sqrt{\dfrac{1}{5}}\boldsymbol{=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}}$　　また　$\boldsymbol{\sin\theta}=\tan\theta\cdot\cos\theta=(-2)\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)\boldsymbol{=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$

$\boxed{4}$　三角方程式・三角不等式

$0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき，次の問いに答えよ。

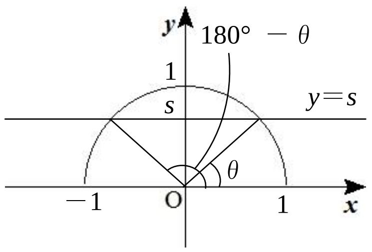
(1)　等式 $2\sin\theta=\sqrt{3}$ を満たす θ を求めよ。

(2)　不等式 $2\sin\theta>\sqrt{3}$ を満たす θ の範囲を求めよ。

要　点

角 θ の三角比の値から，角 θ ($0°\leqq\theta\leqq180°$)を求めることができます。

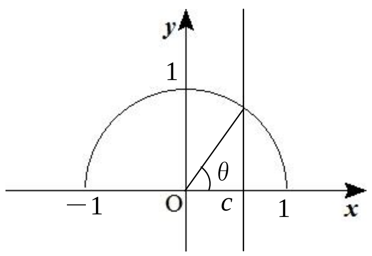
①　$\sin\theta=s$ を満たす θ



$0\leqq s<1$ なら　θ, $180°-\theta$

$s=1$ なら　$\theta=90°$

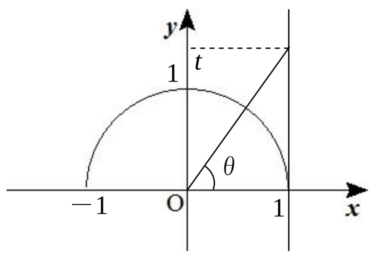
②　$\cos\theta=c$ を満たす θ



$-1\leqq c\leqq1$

θ はただ 1 つ

③　$\tan\theta=t$ を満たす θ



$t\neq0$ のとき，θ はただ 1 つ

$t=0$ なら　$\theta=0°$, $180°$

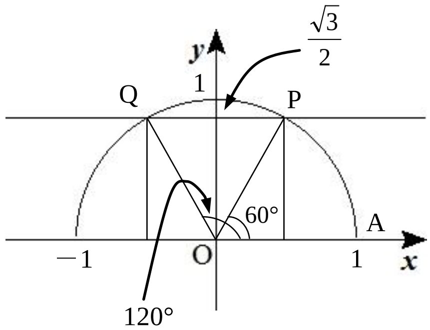
解答

(1)　$2\sin\theta=\sqrt{3}$ から　　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

半径 1 の円周上で，y 座標が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる

点は，右の図の 2 点 P，Q である。

求める θ は，∠AOP と∠AOQ であるから　　**$\theta=60°$，$120°$**



(2)　$2\sin\theta>\sqrt{3}$ から　　$\sin\theta>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

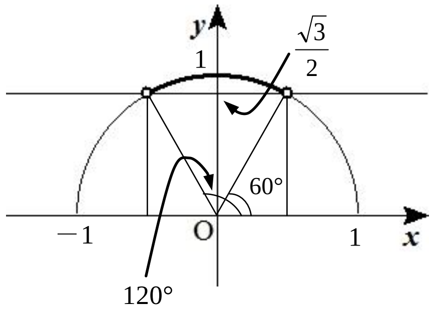
(1)より，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ は

$\theta=60°$，$120°$

よって，右の図から　$\sin\theta>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を

満たす θ の範囲は

$60°<\theta<120°$



5　三角比の対称式の値

$0°\leqq\theta\leqq180°$，$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta\cos\theta$　　　(2)　$\sin\theta-\cos\theta$　　　(3)　$\tan\theta$

要　点

(1)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の両辺を 2 乗します。

(2)　まず，$(\sin\theta-\cos\theta)^2$ の値を求めます。

(3)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ と(2)から，$\sin\theta$，$\cos\theta$ を求めます。

解答

(1)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の両辺を 2 乗すると　　$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{3}{4}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から　　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{4}$

よって，$2\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$ から　　**$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{8}$**

(2)　$(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，(1)から $\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{8}$ であるから　$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\cdot\left(-\dfrac{1}{8}\right)=\dfrac{5}{4}$

ここで，$0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき　$\sin\theta\geqq0$ であることと，$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{8}<0$ から　$\cos\theta<0$

よって，$\sin\theta-\cos\theta>0$ である。したがって　$\boldsymbol{\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{\dfrac{5}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}}$

(3)　条件と(2)から　$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\end{cases}$　これを解くと　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}$，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{4}$

よって　$\boldsymbol{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}}{\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{4}}=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\dfrac{8+2\sqrt{15}}{3-5}=\boldsymbol{-4-\sqrt{5}}$

6　三角比の 2 次関数の最大・最小

$0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき，$y=\cos^2\theta+\sin\theta$ の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

要　点

①　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を利用して，関数を 1 つの三角比で表します。

②　$\sin\theta=t$（または $\cos\theta=t$ ）とおき，変域に注意して 2 次関数のグラフをかきます。

解答

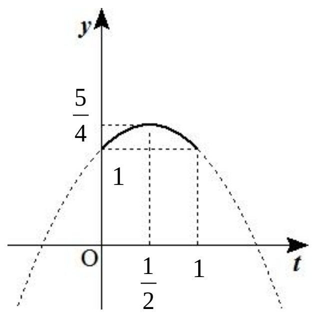
$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ より　$y=\cos^2\theta+\sin\theta=1-\sin^2\theta+\sin\theta=-\sin^2\theta+\sin\theta+1$

$\sin\theta=t$ とおくと，$0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき $0\leqq\sin\theta\leqq1$ であるから　$0\leqq t\leqq1$

y を t を用いて表すと

$$y=-t^2+t+1=-(t^2-t)+1=-\left\{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}+1=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}+1=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$$

$t=\dfrac{1}{2}$ で最大値 $\dfrac{5}{4}$，$t=0$，1 で最小値 1 をとる。



$t=\dfrac{1}{2}$　すなわち　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ を満たす θ は　$\theta=30°$，$150°$

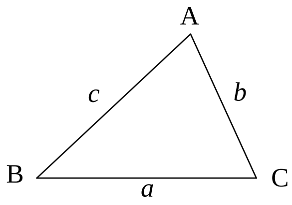
$t=0$　すなわち　$\sin\theta=0$ を満たす θ は　$\theta=0°$，$180°$

$t=1$　すなわち　$\sin\theta=1$ を満たす θ は　$\theta=90°$

よって，**$\theta=30°$，$150°$ のとき最大値 $\dfrac{5}{4}$，$\theta=0°$，$90°$，$180°$ のとき最小値 1**

7　**正弦定理・余弦定理**

△ABC において，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c，
∠A，∠B，∠C の大きさをそれぞれ A，B，C で表すことにする。



(1)　△ABC において，次のものを求めよ。

　①　$A=60°$ ， $B=45°$ ， $a=2$ のとき，b および外接円の半径 R

　②　$a=3$，$B=60°$ ， $c=4$ のとき　b

(2)　△ABC において，$B=45°$ ， $b=\sqrt{6}$ ， $c=3$ のとき，a，A，C を求めよ。

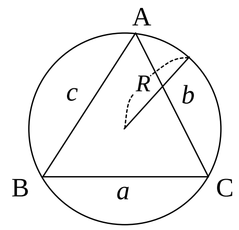
要　点

正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

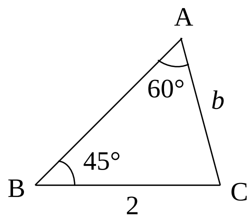
余弦定理

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$



解答

(1)　①　正弦定理により，$\dfrac{2}{\sin 60°}=\dfrac{b}{\sin 45°}$ から　$\dfrac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{b}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$



よって　$\boldsymbol{b}=\left(2\div\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=2\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{4}{\sqrt{6}}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{6}}{3}}$

また，正弦定理により　$2R=\dfrac{2}{\sin 60°}$ から　$2R=\dfrac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

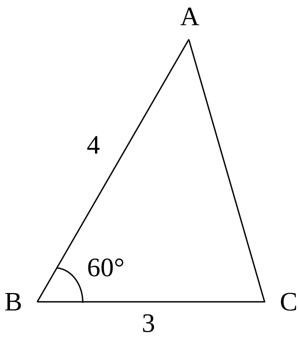
よって　$\boldsymbol{R}=\left(2\div\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\dfrac{1}{2}=2\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$

②　余弦定理により

$b^2=4^2+3^2-2\cdot 4\cdot 3\cdot\cos 60°$

$=16+9-24\cdot\dfrac{1}{2}=13$

$b>0$ から　$b=\boldsymbol{\sqrt{13}}$



(2)　正弦定理により

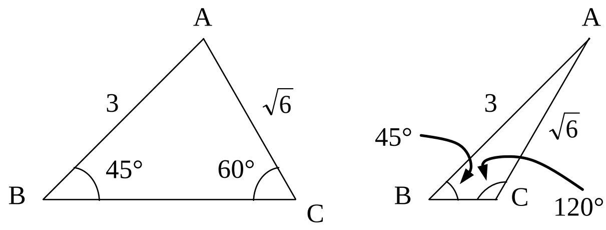
$\dfrac{\sqrt{6}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{3}{\sin C}$ から　$\dfrac{\sqrt{6}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\dfrac{3}{\sin C}$

よって　$\sin C=3\div\left(\sqrt{6}\div\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=3\times\dfrac{1}{\sqrt{6}}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって　$C=60^\circ$，120°

△ABC は右の図のように

2 通りある。



余弦定理により

$(\sqrt{6})^2=3^2+a^2-2\cdot 3\cdot a\cdot\cos 45^\circ$

$6=9+a^2-6a\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　　整理すると　$a^2-3\sqrt{2}a+3=0$

解の公式により　$a=\dfrac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{(-3\sqrt{2})^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1}=\dfrac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{2}$

また，$C=60^\circ$ のとき　$A=75^\circ$，$C=120^\circ$ のとき　$A=15^\circ$

以上から　$\boldsymbol{(a,\ A,\ C)=\left(\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2},\ 75^\circ,\ 60^\circ\right),\ \left(\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2},\ 15^\circ,\ 120^\circ\right)}$

8　三角形の形状

△ABC において，$\sin A=2\cos B\sin C$ が成り立っているとき，この三角形はどのような三角形か。

要　点

正弦定理，余弦定理を用いて，与えられた等式を辺だけの関係式に直します。

解答

与えられた式に　$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$　　をそれぞれ代入すると

$\dfrac{a}{2R}=2\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\cdot\dfrac{c}{2R}$

両辺に $2aR$ を掛けると　$a^2=a^2+c^2-b^2$　　これから　$b^2=c^2$　　$b>0$，$c>0$ より　$b=c$

よって，△ABC は **AB＝AC の二等辺三角形**である。

9　三角形の面積

次の△ABC の面積を求めよ。

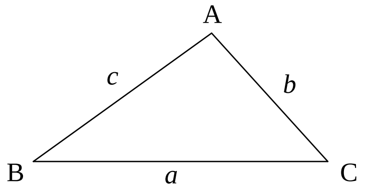
(1)　AB＝2，AC＝3，$A=60^\circ$

(2)　AB＝6，AC＝5，BC＝7

要　点

△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$



解答

(1)　$S=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

(2)　余弦定理により　$\cos A=\frac{6^2+5^2-7^2}{2\cdot 6\cdot 5}=\frac{1}{5}$

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$，$0^\circ<A<180^\circ$ のとき，$\sin A>0$ から　　$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

よって　$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=\boldsymbol{6\sqrt{6}}$

$\boxed{\text{別解}}$　ヘロンの公式を用いる。

$$s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{7+5+6}{2}=9 \text{ であるから}$$

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{9(9-7)(9-5)(9-6)}=6\sqrt{6}$$

$\boxed{１０}$　**三角形の内角の二等分線の長さ**

△ABC において，AB＝5，AC＝3，∠A＝60° とする。∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

要　点

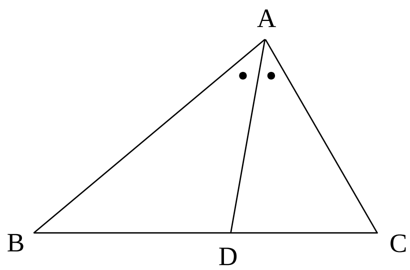
三角形の面積を利用します。

∠BAD＝∠DAC，△ABC＝△ABD＋△ACD であり，

$$\triangle\text{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\text{AB}\cdot\text{AC}\cdot\sin\angle\text{BAC}$$

$$\triangle\text{ABD}=\frac{1}{2}\cdot\text{AB}\cdot\text{AD}\cdot\sin\angle\text{BAD}$$

$$\triangle\text{ACD}=\frac{1}{2}\cdot\text{AD}\cdot\text{AC}\cdot\sin\angle\text{DAC}$$



であることから AD を求めることができます。

解答

△ABC＝△ABD＋△ACD であるので，それぞれ面積の公式から

$$\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \mathrm{AC}\cdot \sin\angle \mathrm{BAC}=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \mathrm{AD}\cdot \sin\angle \mathrm{BAD}+\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AD}\cdot \mathrm{AC}\cdot \sin\angle \mathrm{DAC}$$

よって　$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot \sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot \mathrm{AD}\cdot \sin 30^\circ+\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AD}\cdot 3\cdot \sin 30^\circ$

すなわち　$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot \mathrm{AD}\cdot \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AD}\cdot 3\cdot \frac{1}{2}$

したがって　$\mathrm{AD}=\boldsymbol{\frac{15\sqrt{3}}{8}}$

$\boxed{11}$　**内接円の半径**

△ABC について，次の問いに答えよ。

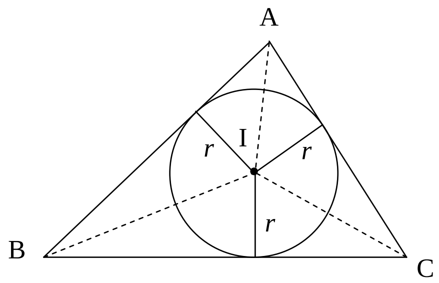
(1)　$a=7$，$b=9$，$c=10$ のとき，△ABC の面積 S と内接円の半径 r を求めよ。

(2)　$a=6$，$b=8$，$\angle \mathrm{C}=60^\circ$ のとき，△ABC の内接円の半径 r を求めよ。

要　点

△ABC の内接円の中心，すなわち，内心を I，面積を S，
内接円の半径を r とすると

$$S=\triangle \mathrm{IBC}+\triangle \mathrm{ICA}+\triangle \mathrm{IAB}$$
$$=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$$
$$=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$



内接円の半径は，3 辺の長さと面積から求めることができます。

解答

(1)　$s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{7+9+10}{2}=13$ であるから，ヘロンの公式により

$$\boldsymbol{S}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{13\cdot 6\cdot 4\cdot 3}=\boldsymbol{6\sqrt{26}}$$

また，$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ にそれぞれの値を代入すると

$6\sqrt{26}=\frac{1}{2}r(7+9+10)$　　　これを解いて　$\boldsymbol{r=\frac{6\sqrt{26}}{13}}$

(2)　△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\angle\mathrm{C}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\cdot\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$$

また　$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle\mathrm{C}=6^2+8^2-2\cdot 6\cdot 8\cdot\cos 60^\circ=36+64-2\cdot 6\cdot 8\cdot\frac{1}{2}=52$

$c>0$ から　$c=2\sqrt{13}$　　$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ にそれぞれの値を代入すると　$12\sqrt{3}=\frac{1}{2}r(6+8+2\sqrt{13})$

$$12\sqrt{3}=(7+\sqrt{13})r \text{ から}\quad r=\frac{12\sqrt{3}}{7+\sqrt{13}}=\frac{12\sqrt{3}(7-\sqrt{13})}{(7+\sqrt{13})(7-\sqrt{13})}=\frac{12\sqrt{3}(7-\sqrt{13})}{36}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}(7-\sqrt{13})}{3}}$$

研究１　**円に内接する四角形の面積**

円に内接する四角形 ABCD において，AB＝6，BC＝8，CD＝6，DA＝5 のとき，対角線 AC の長さ，四角形 ABCD の面積 S をそれぞれ求めよ。

要　点

円に内接する四角形において，向かい合う角の和は 180° であることを利用します。

解答

△ABC において，余弦定理により

$\mathrm{AC}^2=6^2+8^2-2\cdot 6\cdot 8\cdot\cos\angle\mathrm{ABC}$

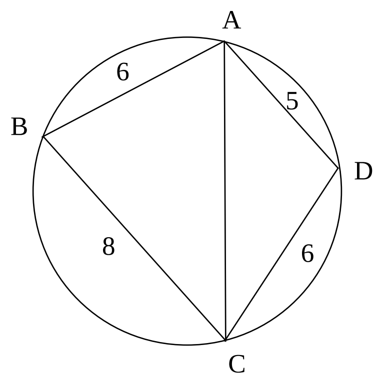
$=100-96\cos\angle\mathrm{ABC}$　……①

△ADC において，余弦定理により

$\mathrm{AC}^2=6^2+5^2-2\cdot 6\cdot 5\cdot\cos\angle\mathrm{ADC}$

$=61-60\cos(180^\circ-\angle\mathrm{ABC})$

$=61+60\cos\angle\mathrm{ABC}$　……②



①，②から　$100-96\cos\angle\mathrm{ABC}=61+60\cos\angle\mathrm{ABC}$

これを解いて　$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{1}{4}$　　①に代入すると　$\mathrm{AC}^2=100-96\cdot\frac{1}{4}=76$

AC＞0 から　$\mathbf{AC}=\boldsymbol{2\sqrt{19}}$

また　$\sin\angle\mathrm{ABC}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$　　$\sin\angle\mathrm{ADC}=\sin(180^\circ-\angle\mathrm{ABC})=\sin\angle\mathrm{ABC}$ より

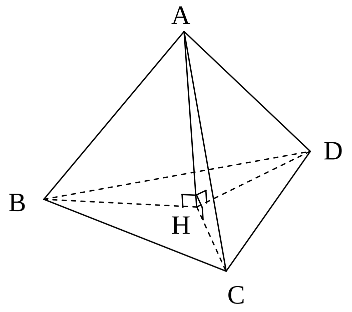
$$S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ADC}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\boldsymbol{\frac{39\sqrt{15}}{4}}$$

研究２　**正四面体の体積**

1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD の体積を求めよ。

要　点

頂点 A から底面△BCD に
垂線 AH を引くと，直角三角形の
斜辺と他の 1 辺が等しいから
　△ABH≡△ACH≡△ADH
よって，BH＝CH＝DH であるから，
点 H は△BCD の外心であることを
利用します。



解答

頂点 A から底面△BCD に垂線 AH を引くと　△ABH≡△ACH≡△ADH
これから，BH＝CH＝DH であるので，点 H は△BCD の外心である。
よって，BH は△BCD の外接円の半径であるから

$$\frac{2}{\sin 60^\circ}=2\mathrm{BH}\qquad \text{これから}\quad \mathrm{BH}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

△ABH は直角三角形であるから，三平方の定理により

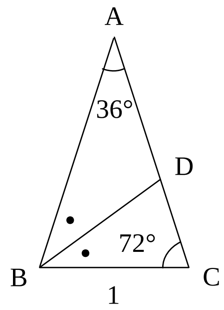
$$\mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BH}^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

また　$\triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot \sin 60^\circ=\sqrt{3}$

以上から，正四面体の体積は　$\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{BCD}\cdot\mathrm{AH}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$

研究３　36°の三角比

$A=36°$，$B=C=72°$，$BC=1$ の$\triangle ABC$ があり，$\angle ABC$ の二等分線と AC の交点を D とする。
$\triangle ABC \backsim \triangle BCD$ であることを利用して，$\cos 36°$ を求めてみよう。



解答

$\angle BAC=\angle CBD=36°$，$\angle ABC=\angle BCD$ より　$\triangle ABC \backsim \triangle BCD$

また，$\triangle BCD$，$\triangle ABD$ は二等辺三角形であるから，$BC=BD=AD=1$ である。

$AB : BC=BC : CD$ であるから，$AB=x$ とおくと $CD=x-1$ より

$x:1=1:(x-1)$　　よって　$x(x-1)=1$　　$x^2-x-1=0$

これを解いて　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$　　$x>0$ より　$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\triangle ABC$ において，余弦定理により　$1=x^2+x^2-2\cdot x\cdot x\cdot\cos 36°$　　これから　$\cos 36°=\dfrac{2x^2-1}{2x^2}$

$x^2=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\dfrac{6+2\sqrt{5}}{4}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ であるから

$$\mathbf{\cos 36°}=\frac{2\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}-1}{2\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{2+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\frac{(2+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=\frac{6-2\sqrt{5}+3\sqrt{5}-5}{4}=\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$$