2 次関数

$\boxed{1}$

(1)　2 次関数 $y=-3x^2-2x+1$ の頂点と軸と求めよ。また，グラフをかけ。

(2)　2 つの放物線 $y=x^2-8x$ と $y=-\dfrac{1}{2}x^2+ax-3b$ の頂点が一致するときの a，b の値を求めよ。

解答

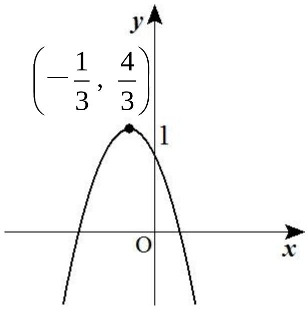
(1)　$y=-3x^2-2x+1=-3\left(x^2+\dfrac{2}{3}x\right)+1=-3\left(x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{9}\right)+1$

$=-3\left\{\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{1}{9}\right\}+1=-3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}+1$

$=-3\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{4}{3}$

頂点の座標：$\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$，軸：直線 $x=-\dfrac{1}{3}$

グラフは右の図のようになる。



(2)　$y=x^2-8x=(x-4)^2-16$　　頂点$(4,\ -16)$

$y=-\dfrac{1}{2}x^2+ax-3b=-\dfrac{1}{2}(x^2-2ax)-3b$

$=-\dfrac{1}{2}\{(x-a)^2-a^2\}-3b$

$=-\dfrac{1}{2}(x-a)^2+\dfrac{1}{2}a^2-3b$　　頂点$\left(a,\ \dfrac{1}{2}a^2-3b\right)$

$$\begin{cases} 4=a & \cdots ① \\ -16=\dfrac{1}{2}a^2-3b & \cdots ② \end{cases}$$

①を②に代入すると　$-16=\dfrac{1}{2}\cdot 4^2-3b=8-3b$　より　$b=8$

よって　**$a=4$，$b=8$**

2

(1)　放物線 $y=-2x^2-14x-13$ をどれだけ平行移動すると，放物線 $y=-2x^2+8x+7$ に重なるか。

(2)　2 次関数 $y=x^2+ax+4$ のグラフを，x 軸方向に 2 だけ平行移動すると 2 次関数 $y=x^2-9x+b$ のグラフとなる。このとき，a，b の値を求めよ。

(3)　次の空欄を埋めよ。

2 次関数 $y=x^2$ のグラフを x 軸方向に［（ア）］，y 軸方向に［（イ）］だけ平行移動したのち，［（ウ）］に関して対称移動したところ，グラフの式は $y=-x^2-2x-2$ となった。

解答

(1)　$y=-2x^2-14x-13=-2(x^2+7x)-13=-2\left\{\left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}\right\}-13=-2\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\frac{49}{2}-13$

$=-2\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+\frac{23}{2}$　　頂点：$\left(-\frac{7}{2},\ \frac{23}{2}\right)$

$y=-2x^2+8x+7=-2(x^2-4x)+7=-2\{(x-2)^2-4\}+7=-2(x-2)^2+8+7$

$=-2(x-2)^2+15$　　頂点：$(2,\ 15)$

それぞれの頂点の座標から　　**x 軸方向に $\frac{11}{2}$，y 軸方向に $\frac{7}{2}$ 平行移動すれば重なる。**

(2)　$y=x^2+ax+4=\left(x+\frac{1}{2}a\right)^2-\frac{1}{4}a^2+4$　　頂点：$\left(-\frac{1}{2}a,\ -\frac{1}{4}a^2+4\right)$

$y=x^2-9x+b=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{81}{4}+b$　　頂点：$\left(\frac{9}{2},\ -\frac{81}{4}+b\right)$

それぞれの頂点の座標から　$\begin{cases} -\frac{1}{2}a+2=\frac{9}{2} & \cdots① \\ -\frac{1}{4}a^2+4=-\frac{81}{4}+b & \cdots② \end{cases}$　　①から　$-\frac{1}{2}a=\frac{5}{2}$ より　$a=-5$

②に $a=-5$ を代入すると　$-\frac{1}{4}\cdot(-5)^2+4=-\frac{81}{4}+b$　これより　$b=-\frac{25}{4}+4+\frac{81}{4}=18$

したがって　**$a=-5$，$b=18$**

(3)　$y=-x^2-2x-2=-(x^2+2x)-2=-\{(x+1)^2-1\}-2=-(x+1)^2+1-2$

$=-(x+1)^2-1$　　頂点：$(-1,\ -1)$

よって，2 次関数 $y=x^2$ のグラフを x 軸方向に **（ア）-1**，y 軸方向に **（イ）1**　だけ平行移動したのち，**（ウ）x 軸**　に関して対称移動すると，グラフの式は $y=-x^2-2x-2$ となる。

〈注意〉**（ア）1，（イ）1，（ウ）原点**　も正解である。

グラフの向きが反対にならなくてはいけないため，（ア）1，（イ）-1，（ウ）y 軸　は不正解。

$\boxed{3}$　次の条件を満たす 2 次関数を求めよ。

(1)　3 点(2，0)，(1，1)，(3，5)を通る。

(2)　x 軸に接し，2 点(1，1)，(4，4)を通る。

解答

(1)　$y=ax^2+bx+c$ に $x=2$，$y=0$ と $x=1$，$y=1$ と $x=3$，$y=5$ を代入して連立方程式を作る。

$$\begin{cases} 0=4a+2b+c & \cdots\ ① \\ 1=a+b+c & \cdots\ ② \\ 5=9a+3b+c & \cdots\ ③ \end{cases}$$

①－②，③－①から

$$\begin{cases} -1=3a+b \\ 5=5a+b \end{cases}$$

この連立方程式を解くと　$a=3$，$b=-10$

②に $a=3$，$b=-10$ を代入すると　$c=8$

以上より　$\boldsymbol{y=3x^2-10x+8}$

(2)　x 軸に接する　⇒　頂点の y 座標が 0

であるから，$y=a(x-p)^2$ に $x=1$，$y=1$ と $x=4$，$y=4$ を代入して連立方程式を作る。

$$\begin{cases} 1=a(1-p)^2 & \cdots\ ① \\ 4=a(4-p)^2 & \cdots\ ② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1=a-2ap+ap^2 & \cdots\ ①' \\ 4=16a-8ap+ap^2 & \cdots\ ②' \end{cases}$$

②′－①′ から　$3=15a-6ap$

$1=5a-2ap$

$a(5-2p)=1$　より　$a=\dfrac{1}{5-2p}$　$\left(①，②から\quad p\neq\dfrac{5}{2}\ である。\right)$

これを①に代入すると　$1=\dfrac{1}{5-2p}(1-p)^2$

$5-2p=1-2p+p^2$　より　$p^2-4=0$　よって $p=\pm2$

$p=2$ のとき $a=1$，$p=-2$ のとき $a=\dfrac{1}{9}$

したがって　$\boldsymbol{y=(x-2)^2,\ y=\dfrac{1}{9}(x+2)^2}$　$\left(または\quad y=x^2-4x+4,\ y=\dfrac{1}{9}x^2+\dfrac{4}{9}x+\dfrac{4}{9}\right)$

4

(1)　関数 $y=x^2+x+2\ (-1\leqq x\leqq 1)$ の最大値および最小値を求めよ。

(2)　関数 $y=x^2-4x\ (a\leqq x\leqq a+1)$ の最小値を，次の 3 つの場合に分けて求めよ。

①　$a<1$　　②　$1\leqq a\leqq 2$　　③　$2<a$

(3)　関数 $y=-(x^2-2x+2)^2+6(x^2-2x+2)+1$ について

①　$x^2-2x+2=t$ とおくとき，t のとり得る値の範囲を求めよ。

②　y の最大値を求めよ。

解答

(1)　$y=x^2+x+2$

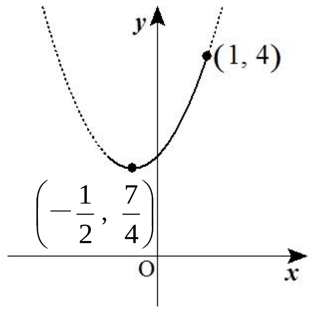
$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+2$$

$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$$

定義域が $-1\leqq x\leqq 1$ であるから

右のグラフより　**$x=1$ のとき最大値 4**

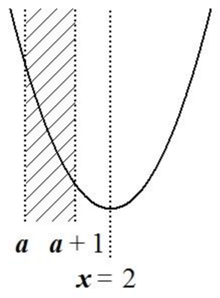
$x=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{7}{4}$



(2)　$y=x^2-4x=(x-2)^2-4\quad(a\leqq x\leqq a+1)$

このグラフは下に凸であり，頂点が決まっていて，定義域が動く。

①　$a<1$ のとき



上のグラフより

$x=a+1$ のとき最小値をとる。

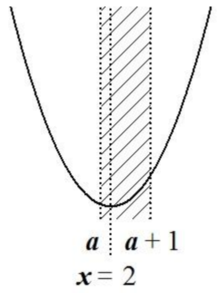
$(a+1)^2-4(a+1)$

$=a^2+2a+1-4a-4$

$=a^2-2a-3$

よって，**最小値 $a^2-2a-3\ (x=a+1)$**

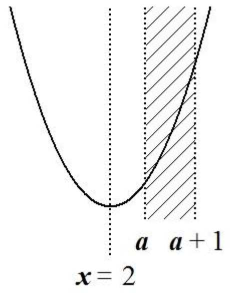
②　$1\leqq a\leqq 2$ のとき



上のグラフより

最小値 $-4\ (x=2)$

③　$2<a$ のとき



上のグラフより

最小値 $a^2-4a\ (x=a)$

(3)　①　$t=x^2-2x+2$

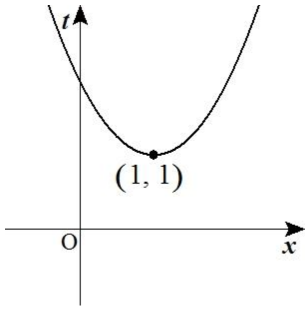
$=(x-1)^2-1+2$

$=(x-1)^2+1$

右のグラフより t は $x=1$ のとき

最小値 1 をとる。

したがって　$\boldsymbol{t\geqq 1}$



②　$y=-(x^2-2x+2)^2+6(x^2-2x+2)+1$

$=-t^2+6t+1$

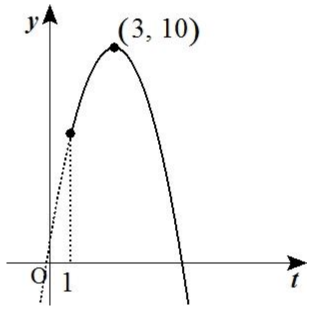
$=-(t^2-6t)+1$

$=-\{(t-3)^2-9\}+1$

$=-(t-3)^2+10$

①より $t\geqq 1$ であるから，右のグラフより

$t=3$ のとき y は最大値 10 をとる。



$t=x^2-2x+2=3$ より $x^2-2x-1=0$　　$x=\dfrac{2\pm\sqrt{4-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{8}}{2}=\dfrac{2\pm 2\sqrt{2}}{2}=1\pm\sqrt{2}$

したがって　**最大値 10 ($\boldsymbol{x=1\pm\sqrt{2}}$)**

$\boxed{5}$

(1)　次の 2 次関数のグラフは x 軸と共有点を何個もつか。

①　$y=-2x^2+6x-\dfrac{9}{2}$　　　②　$y=x^2-\dfrac{9}{2}x+5$

(2)　2 次関数 $y=-x^2+4x+2k$ のグラフと x 軸との共有点の個数は，k の値によってどのように変わるか。

解答

(1)　①　$D=6^2-4\cdot(-2)\cdot\left(-\dfrac{9}{2}\right)=36-36=0$　よって　**1 個**

②　$D=\left(-\dfrac{9}{2}\right)^2-4\cdot 1\cdot 5=\dfrac{81}{4}-20=\dfrac{1}{4}>0$　よって　**2 個**

(2)　$D=4^2-4\cdot(-1)\cdot 2k=16+8k$ である。

(i)　異なる 2 つの共有点をもつ $\Leftrightarrow$ $D>0$　であるから，このとき　$16+8k>0$　$\Rightarrow$　$k>-2$

(ii)　1 点で接する $\Leftrightarrow$ $D=0$　であるから，このとき　$16+8k=0$　$\Rightarrow$　$k=-2$

(iii)　共有点をもたない　$\Leftrightarrow$　$D<0$　であるから，このとき　$16+8k<0$　$\Rightarrow$　$k<-2$

(i)，(ii)，(iii)より　$\begin{cases} \boldsymbol{k>-2} \text{ のとき } \mathbf{2} \text{ 個} \\ \boldsymbol{k=-2} \text{ のとき } \mathbf{1} \text{ 個} \\ \boldsymbol{k<-2} \text{ のとき } \mathbf{0} \text{ 個} \end{cases}$

$\boxed{6}$

(1)　次の 2 次不等式を解け。

①　$2x^2 \leqq 7x$　　　　②　$x^2-x+\dfrac{1}{4}>0$

(2)　連立不等式$\begin{cases} x^2+2x-3 \leqq 0 \\ x^2+x-1>0 \end{cases}$　を解け。

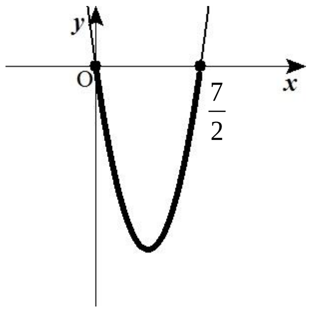
解答

(1)　①　$2x^2 \leqq 7x$　⇒　$2x^2-7x \leqq 0$

$2x^2-7x=0$ の解は，$2x^2-7x=x(2x-7)=0$ より

$x=0,\ \dfrac{7}{2}$

したがって不等式の解は，右の図より　$\mathbf{0 \leqq x \leqq \dfrac{7}{2}}$

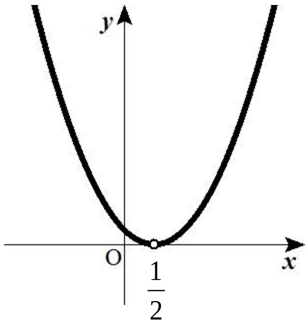


②　$x^2-x+\dfrac{1}{4}=0$ の解は，$x^2-x+\dfrac{1}{4}=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2=0$ より

$x=\dfrac{1}{2}$

したがって不等式の解は，右の図より

$\dfrac{1}{2}$ **以外のすべての実数**　$\left(\text{または}\quad x<\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}<x\right)$



(2)　・$x^2+2x-3 \leqq 0$

$x^2+2x-3=0$ の解は，$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)=0$ より　$x=-3,\ 1$

したがって不等式の解は　$-3 \leqq x \leqq 1$

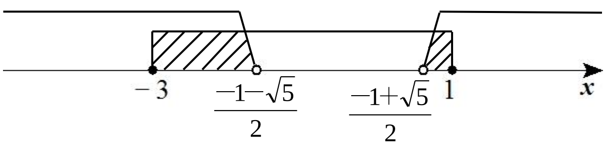
・$x^2+x-1>0$

$x^2+x-1=0$ の解は　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot(-1)}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

したがって不等式の解は　$x<\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}<x$

右の数直線より，連立不等式の解は

$\mathbf{-3 \leqq x < \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < x \leqq 1}$



$\boxed{7}$

2 次関数 $y=x^2-(m+2)x+5$ のグラフが，x 軸の正の部分で異なる 2 つの共有点をもつように定数 m の値の範囲を定めよ。

解答

2 次関数 $y=x^2-(m+2)x+5$ のグラフに対して，$D=\{-(m+2)\}^2-4\cdot1\cdot5$，$f(x)=x^2-(m+2)x+5$ とおく。

$D>0$，(軸の位置)>0，$f(0)>0$　を満たせばよい。

(i)　$D>0$　すなわち　$\{-(m+2)\}^2-4\cdot1\cdot5=m^2+4m-16>0$

$m^2+4m-16=0$ の解は　$m=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot1\cdot(-16)}}{2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{80}}{2}=-2\pm2\sqrt{5}$

したがって　$m<-2-2\sqrt{5}$，$-2+2\sqrt{5}<m$

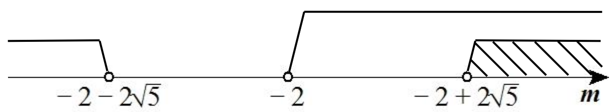
(ii)　(軸の位置)>0

$x^2-(m+2)x+5=\left(x-\dfrac{m+2}{2}\right)^2-\left(\dfrac{m+2}{2}\right)^2+5$ より，軸は直線 $x=\dfrac{m+2}{2}$　これより　$\dfrac{m+2}{2}>0$

したがって　$m>-2$

(iii)　$f(0)>0$

$f(0)=5$ より　$f(0)>0$ を満たしている。



以上のことから，右の数直線より　$\boldsymbol{m>-2+2\sqrt{5}}$

$\boxed{研究}$

(1)　放物線 $y=-x^2+2x+5$ と直線 $y=x+3$ との共有点の座標を求めよ。

(2)　b を実数とする。放物線 $y=x^2-2x-2$ と直線 $y=2x+b$ が接するような b の値を求めよ。

解答

(1)　$x+3=-x^2+2x+5$　⇒　$x^2-x-2=0$　⇒　$(x+1)(x-2)=0$

$x=-1$ のとき　$y=(-1)+3=2$

$x=2$ のとき　$y=2+3=5$

よって，求める共有点の座標は　**(−1，2)，(2，5)**

(2)　$2x+b=x^2-2x-2$　⇒　$x^2-4x-2-b=0$

$D=(-4)^2-4\cdot1\cdot(-2-b)=16+8+4b=24+4b$

$D=0$ のとき題意を満たす。したがって　$\boldsymbol{b=-6}$