場合の数

1

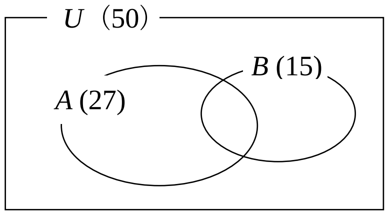
50 人の中で，コーヒーが好きな人が 27 人，紅茶が好きな人が 15 人，コーヒーと紅茶のどちらも好きでない人が 12 人いた。コーヒーと紅茶の両方好きな人は何人か。

解答

全体集合を U とし，そのうち

コーヒーが好きな人の集合を A

紅茶が好きな人の集合を B



とする。このとき　$n(U)=50$，$n(A)=27$，$n(B)=15$，$n(\overline{A\cup B})=12$

求める個数は $n(A\cap B)$であるから，これを x 人とおくと

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=27+15-x$

また　$n(A\cup B)=n(U)-n(\overline{A\cup B})=50-12$

よって　$50-12=27+15-x$

したがって，求める人数は　$x=$**4**（人）

2　次の問いに答えよ。

(1)　100 円硬貨，50 円硬貨，10 円硬貨を用いて，200 円を支払う方法は何通りあるか。ただし，それぞれの硬貨は十分枚数があるものとし，用いない硬貨があってもよいものとする。

(2)　A 県から B 県へ行くのに，バス，電車，飛行機の 3 つの交通手段がある。A 県から B 県へ行って帰るのに，何通りの方法があるか。ただし，往復で同じ交通手段を利用してもよいものとする。

解答

(1)　200 円を支払う方法は，右の樹形図のようになる。

(ⅰ)　100 円硬貨が 2 枚のとき
右の図から　1 通り

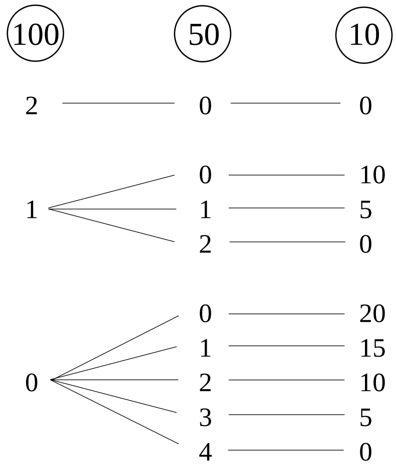
(ⅱ)　100 円硬貨が 1 枚のとき
右の図から　3 通り

(ⅲ)　100 円硬貨が 0 枚のとき
右の図から　5 通り

金額が大きいものから考えると，場合分けが少なくてすむ。

(ⅰ)〜(ⅲ)の場合は同時に起こらないから，求める場合の数は

$1+3+5=$**9**（通り）



数字は用いた枚数を表す。

(2)　求める選び方の総数は，積の法則により

$3\times3=$**9**（通り）

$\boxed{3}$
60 の正の約数は全部で何個あるか。また，その約数の和を求めよ。

解答

$60=2^2\times3\times5$

これから，60 の正の約数は　$(2^0+2^1+2^2)(3^0+3^1)(5^0+5^1)$　を展開した項にすべて現れる。

よって，求める正の約数の個数は　$(2+1)\times(1+1)\times(1+1)=\mathbf{12}$（**個**）

約数の和は　$(1+2^1+2^2)(1+3^1)(1+5^1)=(1+2+4)(1+3)(1+5)=7\times4\times6=\mathbf{168}$

$\boxed{4}$　次の問いに答えよ。

(1)　7 個の整数 1，2，3，4，5，6，7 から，異なる 3 個を取り出して 1 列に並べたときできる 3 桁の整数は全部で何個あるか。また，このうち奇数は何個あるか。

(2)　6 個の整数 0，1，2，3，4，5 から，異なる 4 個を取り出して 1 列に並べたときできる 4 桁の整数は全部で何個あるか。

(3)　男子 3 人，女子 3 人の計 6 人が 1 列に並ぶとき，女子 3 人が隣り合う並び方は全部で何通りあるか。また，男子が両端にくるような並び方は全部で何通りあるか。

解答

(1)　7 個の整数から異なる 3 個を取って並べたときにできる 3 桁の整数は　${}_7P_3=7\times6\times5=\mathbf{210}$（**個**）

また，このうち奇数は，一の位が 1，3，5，7 のいずれかで　4 通り

そのおのおのに対して，百，十の位は残り 6 個から 2 個を取る順列であるから　${}_6P_2$ 通り

よって，求める個数は　$4\times{}_6P_2=4\times6\times5=\mathbf{120}$（**個**）

(2)　千の位は，0 を除く 1～5 から 1 個取るから　5 通り

そのおのおのに対して，百，十，一の位は，0 を含めた残り 5 個から 3 個を取る順列であるから　${}_5P_3$ 通り

よって，求める個数は　$5\times{}_5P_3=5\times5\times4\times3=\mathbf{300}$（**個**）

別解　0～5 の 6 個の整数から 4 個取って並べる順列の総数は　${}_6P_4=6\times5\times4\times3=360$（個）

このうち，1 番目の整数が 0 であるものは　${}_5P_3=5\times4\times3=60$（個）

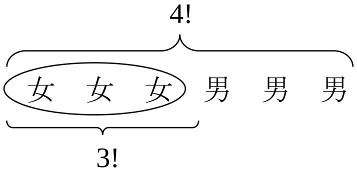
よって，求める個数は　$360-60=300$（個）

(3)　女子 3 人をまとめて 1 組と考える。

女子 3 人の 1 組と男子 3 人の並び方は　4! 通り

女子 3 人の並び方は　3! 通り

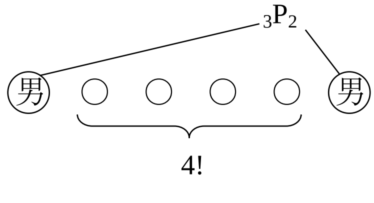
よって，求める並び方は　$4!\times3!=4\times3\times2\times1\times3\times2\times1=\mathbf{144}$（**通り**）



また，男子が両端に並ぶ並び方は　${}_3P_2$ 通り

残り 4 人の並び方は　4! 通り

よって，求める並び方は　${}_3P_2\times4!=3\times2\times4\times3\times2\times1=\mathbf{144}$（**通り**）



$\boxed{5}$　次の問いに答えよ。

(1)　異なる 7 個のビーズを円形に並べる方法は何通りあるか。

(2)　異なる 7 個のビーズに糸を通して輪を作るとき，何通りの作り方があるか。

(3)　立方体の各面を，異なる 6 色すべてを使って塗る方法は何通りあるか。ただし，立方体を回転させて一致する塗り方は同じとみなす。

解答

(1)　異なる 7 個のビーズを円形に並べる方法は

$$\frac{{}_7P_7}{7}=(7-1)!=6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=\mathbf{720}\text{（通り）}$$

(2)　ビーズに糸を通した輪は，裏返すと同じになるから

$$\frac{(7-1)!}{2}=\mathbf{360}\text{（通り）}$$

(3)　まず，上面の色を固定する。

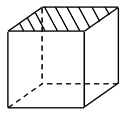
このとき，下面の色は残りの色で　5 通り

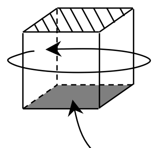
そのおのおのについて，側面の塗り方は，異なる 4 個の円順列

であるから　(4－1)! 通り

よって，求める方法は

$$5\times(4-1)!=5\times3!=5\times3\times2\times1$$
$$=\mathbf{30}\text{（通り）}$$





$\boxed{6}$

(1)　4 種類の数字 0，1，2，3 を使ってできる 3 桁の整数は何個あるか。ただし，同じ数字を繰り返し使ってもよい。

(2)　6 人を 2 つの部屋 A，B に分けるとき，どの部屋も 1 人以上になる分け方は全部で何通りあるか。

解答

(1)　百の位に使える数字は，1，2，3 の 3 通り

十の位，一の位に使える数字は，それぞれ 0，1，2，3 の 4 通り

よって，求める個数は　$3\times4^2=\mathbf{48}$**（個）**

(2)　空き部屋ができてもよいとすると，A，B の 2 つの部屋に 6 人を分ける方法は

$2^6=64$（通り）

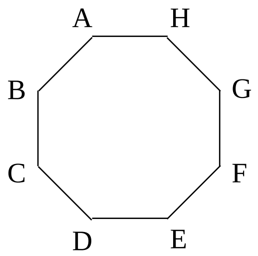
このうち，A，B の一方だけに入る方法は　2 通り

よって，求める分け方は　$64-2=\mathbf{62}$**（個）**

$\boxed{7}$　次の問いに答えよ。

(1)　9 人から 6 人を選ぶ選び方は何通りあるか。

(2)　正八角形 ABCDEFGH の 3 つの頂点を選んで三角形を作るとき，全部で何個できるか。また，正八角形と辺を共有しないものは何個できるか。



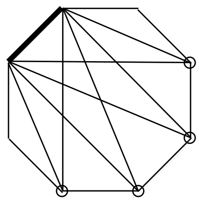
解答

(1)　${}_9C_6={}_9C_3=\dfrac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}=$**84**（通り）

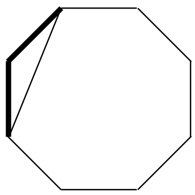
(2)　8 つの頂点から 3 つの頂点を選んで作った三角形は　${}_8C_3=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=$**56**（個）

また，正八角形と 1 辺だけを共有する三角形は，各辺に対し辺の両端および両隣を除く頂点を選べばよいから

$(8-4)\times8=32$（個）



正八角形と 2 辺を共有する三角形は，隣り合う 2 辺でできる三角形であるから　8 個



以上から，求める三角形の個数は

$56-(32+8)=$**16**（個）

$\boxed{8}$

8 人を次のように分ける方法は何通りあるか。

(1)　2 人ずつ，A，B，C，D の 4 組に分ける。

(2)　2 人ずつ 4 組に分ける。

(3)　3 人，3 人，2 人の 3 組に分ける。

解答

(1)　A に入れる 2 人を選ぶ選び方は　${}_8C_2$ 通り

残りの 6 人から B に入れる 2 人を選ぶ選び方は　${}_6C_2$ 通り

残りの 4 人から C に入れる 2 人を選ぶ選び方は　${}_4C_2$ 通り

D には残りの 2 人が入るから，求める分け方は

$${}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_2=\frac{8\cdot7}{2\cdot1}\times\frac{6\cdot5}{2\cdot1}\times\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=\mathbf{2520}\text{（通り）}$$

(2)　(1)で，A，B，C，D の区別をなくすと，同じものが 4! 通りずつできるから，求める分け方は

$$\frac{{}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2}{4!} = \frac{2520}{24} = \mathbf{105}\text{（通り）}$$

(3)　3 人，3 人，2 人を，A，B，C の 3 組に分ける方法は

$${}_8C_3 \times {}_5C_3 = {}_8C_3 \times {}_5C_2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 560\text{（通り）}$$

A，B の区別をなくすと，同じものが 2! 通りずつできるから，求める分け方は

$$\frac{{}_8C_3 \times {}_5C_3}{2!} = \frac{560}{2} = \mathbf{280}\text{（通り）}$$

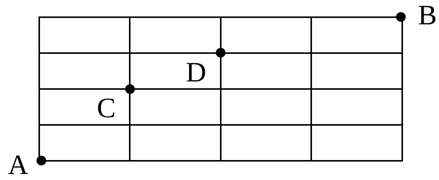
9

右の図において，A 地点から B 地点まで最短の道を行くとき，次の場合は何通りの道順があるか。

(1)　全部の道順

(2)　C 地点を通る道順

(3)　C 地点と D 地点の両方を通らない道順



解答

(1)　上へ 1 区画進むことを↑，右へ 1 区画進むことを→で表す。最短の道順は，↑4 個，→4 個の順列で表されるから　$\frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{70}$**（通り）**

(2)　A 地点から C 地点までの最短の道順は，↑2 個，→1 個の順列で表されるから　$\frac{3!}{2!1!}$ 通り

C 地点から B 地点までの最短の道順は，↑2 個，→3 個の順列で表されるから　$\frac{5!}{2!3!}$ 通り

よって，求める道順は　$\frac{3!}{2!1!} \times \frac{5!}{2!3!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 1} \times \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \times 10 = \mathbf{30}$**（通り）**

(3)　(C 地点と D 地点の両方を通らない道順)＝(全部の道順)－(C 地点または D 地点を通る道順)

ここで　(C 地点または D 地点を通る道順)＝(C 地点を通る道順)＋(D 地点を通る道順)

－(C 地点と D 地点を通る道順)

まず，D 地点を通る道順を求める。

A 地点から D 地点は↑3 個，→2 個で　$\frac{5!}{3!2!}$ 通り

D 地点から B 地点は↑1 個，→2 個で　$\frac{3!}{1!2!}$ 通り

よって　$\frac{5!}{3!2!} \times \frac{3!}{1!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \times 3 = 30$（通り）

次に，C 地点と D 地点を通る道順を求める。

A 地点から C 地点は↑2 個，→1 個で　$\dfrac{3!}{2!1!}$ 通り

C 地点から D 地点は↑1 個，→1 個で　$\dfrac{2!}{1!1!}$ 通り

D 地点から B 地点は↑1 個，→2 個で　$\dfrac{3!}{1!2!}$ 通り

よって　$\dfrac{3!}{2!1!}\times\dfrac{2!}{1!1!}\times\dfrac{3!}{1!2!}=\dfrac{3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot1}\times\dfrac{2\cdot1}{1\cdot1}\times\dfrac{3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot1}=3\times2\times3=18$（通り）

以上から，求める道順は　$70-(30+30-18)=$**28（通り）**

１０　次の問いに答えよ。

(1)　$x+y+z=8$，$x\geqq0$，$y\geqq0$，$z\geqq0$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ は，全部で何組あるか。

(2)　$l+m+n=8$ を満たす自然数の組 $(l,\ m,\ n)$ は，全部で何組あるか。

解答

(1)　異なる 3 種類のものから，重複を許して 8 個取る組合せの総数であるから

$${}_3\mathrm{H}_8={}_{3+8-1}\mathrm{C}_8={}_{10}\mathrm{C}_2=\frac{10\cdot9}{2\cdot1}=\mathbf{45}\text{（組）}$$

別解　8 個の○と 2 つの仕切り｜を考え，例えば

○○｜○○○｜○○○　は　$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 3)$

｜○○○○○｜○○○　は　$(x,\ y,\ z)=(0,\ 5,\ 3)$

を表す，と考えればよいから，求める$(x,\ y,\ z)$の組の総数は

$${}_{10}\mathrm{C}_2=\frac{10\cdot9}{2\cdot1}=45\text{（組）}$$

(2)　l，m，n は自然数であるから，$l\geqq1$，$m\geqq1$，$n\geqq1$ であり，0 とはならない。そこで，

$l-1=X$，$m-1=Y$，$n-1=Z$

とおき，0 以上の整数 $X\geqq0$，$Y\geqq0$，$Z\geqq0$ について考える。$l=X+1$，$m=Y+1$，$n=Z+1$ を与えられた方程式に代入すると

$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)=8$　すなわち　$X+Y+Z=5$，$X\geqq0$，$Y\geqq0$，$Z\geqq0$

異なる 3 種類のものから，重複を許して 5 個取る組合せの総数であるから

$${}_3\mathrm{H}_5={}_{3+5-1}\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=\frac{7\cdot6}{2\cdot1}=\mathbf{21}\text{（組）}$$

別解　8 個の○を並べたとき，その間の 7 か所に 2 つの仕切り｜を入れることを考える。

例えば　○○｜○○○｜○○○　は　$(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 3)$

を表す，と考えればよいから，求める$(x,\ y,\ z)$の組の総数は

$${}_7\mathrm{C}_2=\frac{7\cdot6}{2\cdot1}=21\text{（組）}$$

研究１

A，B，C，D，E，F の 6 人が 1 列に並ぶとき，A，B，C の 3 人が隣り合わないような並び方は全部で何通りあるか。

解答

まず，D，E，F の 3 人を並べる。

次に，その間または両端である 1〜4 に A，B，C を並べれば，A，B，C が隣り合うことはない。

1 Ⓓ 2 Ⓔ 3 Ⓕ 4

D，E，F の 3 人の並び方は　3!　通り

1〜4 に A，B，C が並ぶ並び方は　${}_4P_3$ 通り

よって，求める並び方は　$3!\times{}_4P_3=3\cdot2\cdot1\times4\cdot3\cdot2=$**144**（通り）

研究２　**順序が定まった順列**

M，O，U，N，T，A，I，N の 8 文字を横 1 列に並べるとき，O，U，A，I がこの順に並ぶ並べ方は何通りあるか。

解答

O，U，A，I を同じもの，すなわち，4 個の□とみる。

□ : 4 個，M : 1 個，N : 2 個，T : 1 個を横 1 列に並べ，4 個の□に左から O，U，A，I を入れればよい。

よって，求める並べ方は

$$\frac{8!}{4!1!2!1!}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot1\cdot2\cdot1\cdot1}=\mathbf{840}\text{（通り）}$$