

## 分数関数，無理関数，逆関数，合成関数

1

(1) 次の関数のグラフの漸近線を求め，そのグラフをかけ。

①  $y = \frac{2}{x+1} - 3$

②  $y = \frac{3x-7}{x-2}$

(2) 2つの関数  $y = \frac{1}{x} - 2$ ， $y = -2x + 1$  について，次の問いに答えよ。

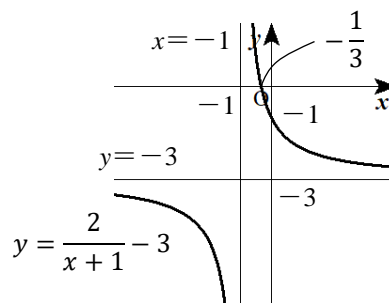
① 2つの関数のグラフの共有点の座標を求めよ。

② グラフを利用して，不等式  $\frac{1}{x} - 2 \geq -2x + 1$  を解け。

### 解答

(1) ① 漸近線は，2直線  $x = -1$ ， $y = -3$

グラフは右の図のようになる。



②  $\frac{3x-7}{x-2} = \frac{3(x-2)+6-7}{x-2} = \frac{-1}{x-2} + 3$

よって，与えられた関数は

$y = -\frac{1}{x-2} + 3$  と変形できる。

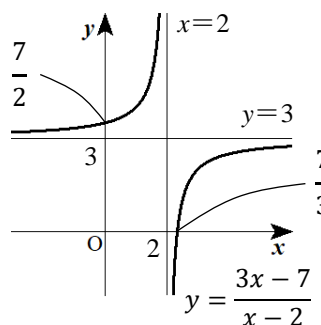
したがって，漸近線は

2直線  $x = 2$ ， $y = 3$

グラフは右の図のようになる。

$$\begin{array}{r} 3 \\ x-2 \overline{) 3x-7} \\ \underline{3x-6} \phantom{0} \\ -1 \phantom{0} \end{array}$$

$3x-7 = 3(x-2) - 1$   
と変形できる。



(2) ①  $\frac{1}{x} - 2 = -2x + 1$       両辺に $x$ を掛けて  $1 - 2x = x(-2x + 1)$

展開して整理すると  $2x^2 - 3x + 1 = 0$       よって  $(x-1)(2x-1) = 0$

これを解くと  $x = 1, \frac{1}{2}$

$y = -2x + 1$  に  $x = 1$  を代入すると  $y = -1$        $x = \frac{1}{2}$  を代入すると  $y = 0$

したがって共有点の座標は  $(1, -1), (\frac{1}{2}, 0)$

関数  $y = \frac{1}{x} - 2$  の定義域  
は  $x \neq 0$  であることに  
注意する。

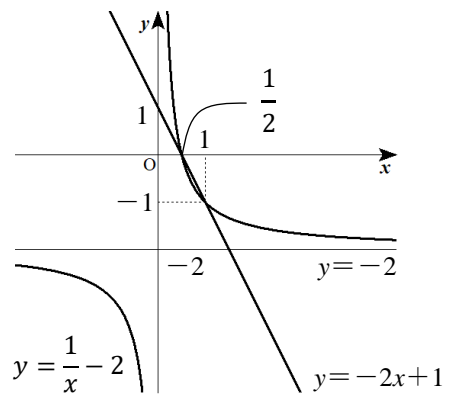
② 関数  $y = \frac{1}{x} - 2$  と直線  $y = -2x + 1$  のグラフは

右の図のようになる。

求める不等式の解は， $y = \frac{1}{x} - 2$  のグラフが

直線  $y = -2x + 1$  より上側，または共有点をもつ部分に対する  $x$  の値の範囲であるから

$$0 < x \leq \frac{1}{2}, 1 \leq x$$



2

(1) 次の関数のグラフをかけ。

①  $y = -\sqrt{-3x}$

②  $y = \sqrt{2x+2}$

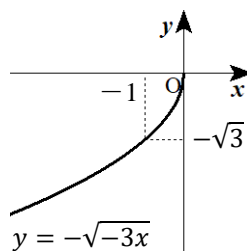
(2) 2つの関数  $y = \sqrt{-3x+4}$ ， $y = -x$  について，次の問いに答えよ。

① 2つの関数のグラフの共有点の座標を求めよ。

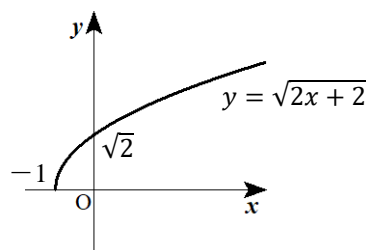
② グラフを利用して，不等式  $\sqrt{-3x+4} > -x$  を解け。

解答

(1) ① グラフは右の図のようになる。



② 与えられた関数は  $y = \sqrt{2(x+1)}$  と変形できる。  
よって，グラフは右の図のようになる。



(2) ①  $\sqrt{-3x+4} = -x \dots\dots (*)$

両辺を2乗すると  $-3x+4 = (-x)^2$

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \quad (x+4)(x-1) = 0 \quad \text{これを解くと } x = -4, 1$$

$x = -4$  は(\*)を満たす。

(左辺)=4,	(右辺)=4
---------	--------

$x = 1$  は(\*)を満たさない。

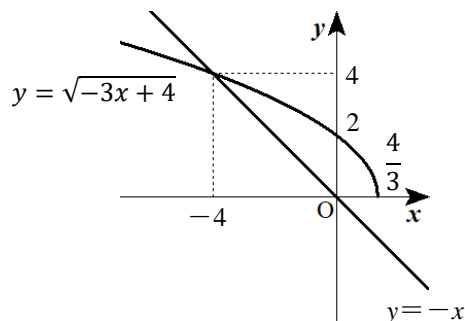
(左辺)=1,	(右辺)=-1
---------	---------

よって，共有点の座標は  $(-4, 4)$

② 関数  $y = \sqrt{-3x+4}$  と直線  $y = -x$  のグラフは右の図のようになる。

求める不等式の解は， $y = \sqrt{-3x+4}$  のグラフが直線  $y = -x$  より上側にある部分に対する

$x$  の値の範囲であるから  $-4 < x \leq \frac{4}{3}$



3

(1) 次の関数の逆関数を求めよ。

①  $y = -\frac{1}{3}x + 1$       ②  $y = 2x - 3$  ( $0 \leq x \leq 4$ )      ③  $y = \frac{9x - 2}{x - 1}$       ④  $y = (x - 1)^2$  ( $x \geq 1$ )

(2) 次の関数の逆関数のグラフをかけ。

①  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$       ②  $y = -\log_3 x$

**解答**

(1) ①  $x$ について解くと， $\frac{1}{3}x = -y + 1$  から  $x = -3y + 3$

逆関数は， $x$ と $y$ をいれかえて  $y = -3x + 3$

② この関数の値域は  $-3 \leq y \leq 5$  また， $x$ について解くと， $-2x = -y - 3$  から  $x = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$

逆関数は， $x$ と $y$ をいれかえて  $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$  ( $-3 \leq x \leq 5$ )

③ 両辺に $x - 1$ を掛けると， $(x - 1)y = 9x - 2$  から  $xy - y = 9x - 2$

$$xy - 9x = y - 2 \quad x(y - 9) = y - 2 \quad \dots\dots(*)$$

ここで， $y = \frac{9x - 2}{x - 1} = \frac{9(x - 1) + 7}{x - 1} = \frac{7}{x - 1} + 9$  より，直線 $y = 9$ は漸近線であるから  $y \neq 9$

(\*)の両辺を $y - 9$ で割ると  $x = \frac{y - 2}{y - 9}$       逆関数は， $x$ と $y$ を入れかえて  $y = \frac{x - 2}{x - 9}$

④ この関数の値域は  $y \geq 0$

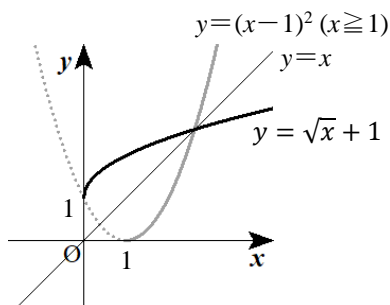
$y = (x - 1)^2$ から  $x - 1 = \pm\sqrt{y}$

$x \geq 1$ であるから  $x = 1 + \sqrt{y}$

逆関数は， $x$ と $y$ を入れかえて

$$y = \sqrt{x} + 1$$

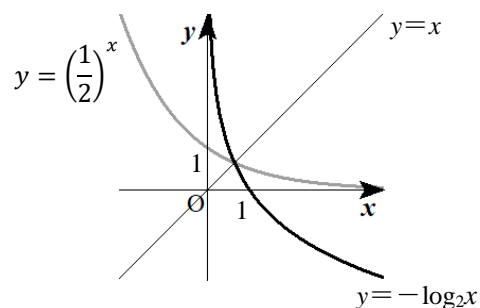
関数 $y = \sqrt{x} + 1$ のグラフは，関数 $y = \sqrt{x}$ のグラフを  
を $y$ 軸方向に1だけ平行移動したもの。



(2) ①  $x$ について解くと  $x = \log_{\frac{1}{2}} y = \frac{\log_2 y}{\log_2 \frac{1}{2}} = -\log_2 y$

逆関数は， $x$ と $y$ を入れかえて  $y = -\log_2 x$

逆関数のグラフは右の図のようになる。



② 両辺を底が3の対数で表すと

$$\log_3 3^y = \log_3 \frac{1}{x}$$

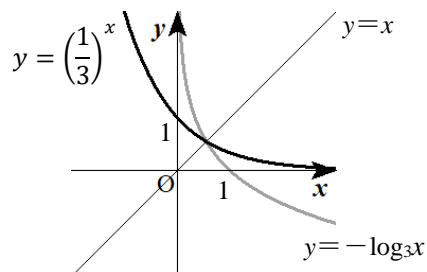
よって  $\frac{1}{x} = 3^y$

$x$ について解くと  $x = \frac{1}{3^y} = \left(\frac{1}{3}\right)^y$

逆関数は， $x$ と $y$ を入れかえて  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

逆関数のグラフは右の図のようになる。

(左辺)  $= y = y \times 1 = y \times \log_3 3 = \log_3 3^y,$   
 (右辺)  $= \log_3 x^{-1} = \log_3 \frac{1}{x}$



4

(1)  $f(x)=|x+1|$ ,  $g(x)=2^x$ ,  $h(x)=\sin x$  とする。次の問いに答えよ。

①  $(g \circ f)(x)$ ,  $(f \circ g)(x)$ を求めよ。      ②  $(h \circ (g \circ f))(x)$ ,  $((h \circ g) \circ f)(x)$ を求めよ。

(2)  $f(x) = \frac{3}{x+2}$  の逆関数を求めよ。また,  $(f \circ f^{-1})(x)$ ,  $(f^{-1} \circ f)(x)$ をそれぞれ求めよ。

**解答**

(1) ①  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(|x+1|) = 2^{|x+1|}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2^x) = |2^x + 1| = 2^x + 1$$

$2^x > 0 \text{ より } |2^x + 1| > 0$

② ①より,  $(g \circ f)(x) = 2^{|x+1|}$  であるから  $(h \circ (g \circ f))(x) = h(2^{|x+1|}) = \sin 2^{|x+1|}$

また,  $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(2^x) = \sin 2^x$  であるから

$$((h \circ g) \circ f)(x) = \sin 2^{f(x)} + 3 = \sin 2^{|x+1|}$$

(2)  $x$ について解くと,  $(x+2)f(x) = 3$  から  $x = \frac{3}{f(x)} - 2$

逆関数 $f^{-1}(x)$ は,  $x$ と $f(x)$ を入れかえて  $f^{-1}(x) = \frac{3}{x} - 2$

$$\text{また, } (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{3}{x} - 2\right) = \frac{3}{\frac{3}{x} - 2 + 2} = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{3}{x+2}\right) = \frac{3}{\frac{3}{x+2}} - 2 = x$$

関数 $f(x) = \frac{3}{x+2}$ の定義域  
は $x \neq -2$ , 値域は $f(x) \neq 0$   
であることに注意する。