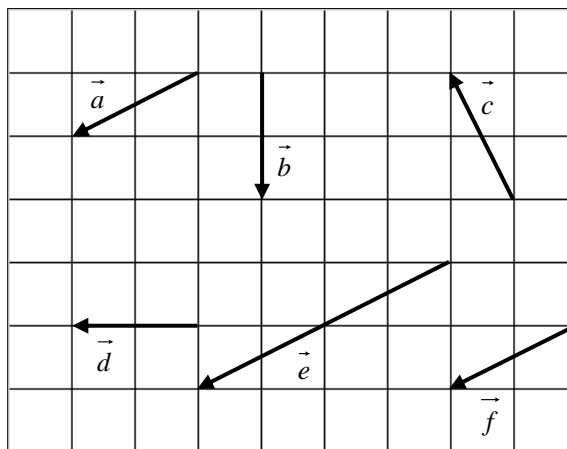


平面上のベクトル

1

右の図において、次のベクトルを選べ。

- (1) 等しいベクトル
- (2) 大きさが等しいベクトル
- (3) 向きが等しいベクトル

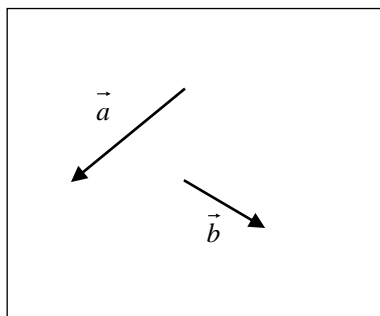


解答

- (1) \vec{a} と \vec{f}
- (2) \vec{a} と \vec{c} と \vec{f} , \vec{b} と \vec{d}
- (3) \vec{a} と \vec{e} と \vec{f}

2

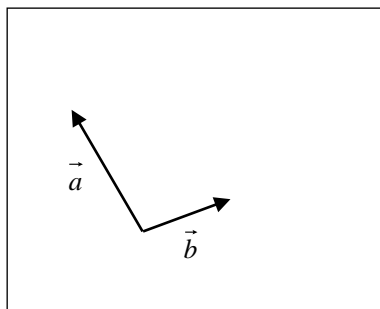
(1) 右の図の2つのベクトル \vec{a} , \vec{b} について,
 $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ を図示せよ。



(2) 右の図の2つのベクトル \vec{a} , \vec{b} について,
 次のベクトルを図示せよ。

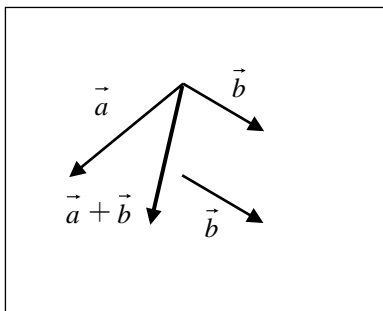
① $\frac{1}{2}\vec{a}$

② $\vec{a} - 2\vec{b}$

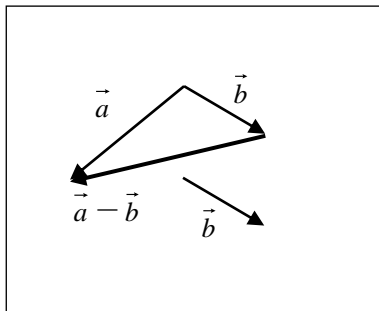


解答

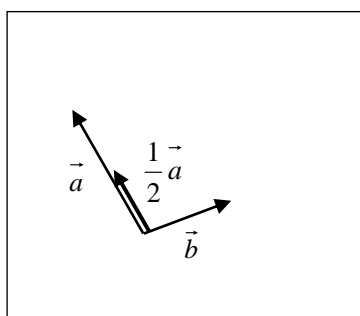
(1) $\vec{a} + \vec{b}$



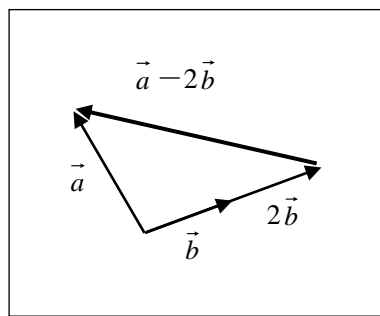
$\vec{a} - \vec{b}$



(2) ① $\frac{1}{2}\vec{a}$



② $\vec{a} - 2\vec{b}$



3

次の問いに答えよ。

- (1) 等式 $2(\vec{a} + 2\vec{x}) - 4\vec{a} = 5(\vec{x} - 3\vec{b})$ を満たすベクトル \vec{x} を, \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。
 (2) 等式 $\vec{x} + \vec{y} = \vec{a}$, $3\vec{x} + 2\vec{y} = \vec{b}$ を満たすベクトル \vec{x} , \vec{y} を, \vec{a} , \vec{b} を用いてそれぞれ表せ。

解答

(1) 展開すると $2\vec{a} + 4\vec{x} - 4\vec{a} = 5\vec{x} - 15\vec{b}$ よって $\vec{x} = -2\vec{a} + 15\vec{b}$

(2) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{a}$ ……①, $3\vec{x} + 2\vec{y} = \vec{b}$ ……② とおく。

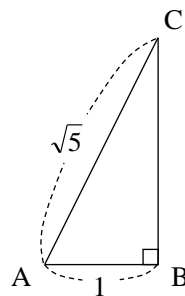
①×2-②から $-\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$ よって $\vec{x} = -2\vec{a} + \vec{b}$

これを①に代入すると $-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{y} = \vec{a}$ よって $\vec{y} = 3\vec{a} - \vec{b}$

\vec{y} の別解 ①×3-②から $\vec{y} = 3\vec{a} - \vec{b}$

4

右の図のような直角三角形 ABC において,
 \vec{BC} と平行な単位ベクトルを \vec{AB} , \vec{AC} を
 用いて表せ。



解答

$BC = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = 2$, $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$ より, 求める単位ベクトルは

$$\frac{\vec{BC}}{|\vec{BC}|} = \frac{\vec{AC} - \vec{AB}}{2}, \quad -\frac{\vec{BC}}{|\vec{BC}|} = -\frac{\vec{AC} - \vec{AB}}{2}$$

5

$\vec{a}=(2, -4)$, $\vec{b}=(5, -3)$ のとき, $-3\vec{a}+2\vec{b}$ を成分で表せ。また, その大きさを求めよ。

解答

$$-3\vec{a}+2\vec{b}=-3(2, -4)+2(5, -3)=(-6, 12)+(10, -6)=(\mathbf{4, 6})$$

$$|-3\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{4^2+6^2}=\mathbf{2\sqrt{13}}$$

6

$\vec{a}=(2, -4)$, $\vec{b}=(5, -3)$ のとき, $\vec{p}=(7, 0)$ を $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ の形で表せ。

解答

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}\text{を成分で表すと } (7, 0)=s(2, -4)+t(5, -3)=(2s+5t, -4s-3t)$$

$$\text{よって } \begin{cases} 7=2s+5t \\ 0=-4s-3t \end{cases} \text{これを解いて } s=-\frac{3}{2}, t=2$$

$$\text{したがって } \vec{p}=-\frac{3}{2}\vec{a}+2\vec{b}$$

7

次の問いに答えよ。

- (1) 4点 $A(2, -4)$, $B(5, -3)$, $C(2, 1)$, D を頂点とする平行四辺形 $ABCD$ がある。頂点 D の座標を求めよ。
- (2) 2つのベクトル $\vec{a} = (2, -4)$, $\vec{b} = (5+t, -3-t)$ が平行になるように、 t の値を定めよ。

解答

- (1) 頂点 D の座標を (x, y) とおく。

四角形 $ABCD$ が平行四辺形であるから

$$\vec{AB} = \vec{DC}$$

ここで $\vec{AB} = (5-2, -3-(-4)) = (3, 1)$

$$\vec{DC} = (2-x, 1-y)$$

よって $\begin{cases} 3=2-x \\ 1=1-y \end{cases}$ これを解いて $x=-1, y=0$

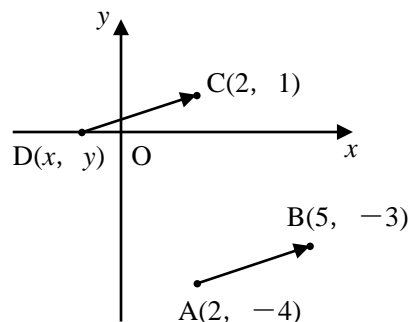
したがって $D(-1, 0)$

- (2) $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ で、 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ より、 $\vec{b} = k\vec{a}$ となる実数 k があるから

$$(5+t, -3-t) = k(2, -4)$$

よって $\begin{cases} 5+t=2k \\ -3-t=-4k \end{cases}$ これを解いて $k=-1, t=-7$

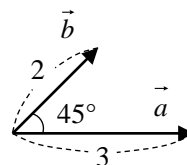
したがって $t=-7$



8

次の内積を求めよ。

- (1) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, \vec{a} と \vec{b} のなす角が 45° のときの、内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$



- (2) $\vec{a} = (2, -4)$, $\vec{b} = (5, 3)$ のときの、内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$

解答

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 45^\circ = 3 \times 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 5 + (-4) \times 3 = -2$

9

次の問いに答えよ。

(1) 2つのベクトル $\vec{a}=(3, 7)$, $\vec{b}=(-5, -2)$ のなす角 θ を求めよ。(2) $\vec{a}=(2, -4)$, $\vec{b}=(5+x, 3+x)$ が垂直であるとき、 x の値を求めよ。

解答

$$(1) \cos \theta = \frac{3 \times (-5) + 7 \times (-2)}{\sqrt{3^2 + 7^2} \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2}} = \frac{-29}{\sqrt{58} \sqrt{29}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 135^\circ$$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times (5+x) + (-4) \times (3+x) = 10 + 2x - 12 - 4x = -2x - 2$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \text{ となるには, } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ となればよいので } -2x - 2 = 0 \quad \text{よって } x = -1$$

10

 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{a}+2\vec{b}|=7$ のとき、 \vec{a} と \vec{b} のなす角 θ を求めよ。ただし、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。

解答

$$|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 3^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 \times 4^2 = 73 + 4\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\text{これと, } |\vec{a} + 2\vec{b}| = 7 \text{ から } 73 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 49 \quad \text{よって } \vec{a} \cdot \vec{b} = -6$$

$$\text{したがって } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-6}{3 \cdot 4} = -\frac{1}{2} \quad 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 120^\circ$$

11

3点 $O(0, 0)$, $A(2, -4)$, $B(5, -3)$ を頂点とする三角形の面積 S を求めよ。

解答

$$\vec{OA} = (2, -4), \vec{OB} = (5, -3) \text{ であるから}$$

$$|\vec{OA}|^2 = 2^2 + (-4)^2 = 20, \quad |\vec{OB}|^2 = 5^2 + (-3)^2 = 34$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 2 \times 5 + (-4) \times (-3) = 22$$

$$\text{よって } S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{OA}|^2 |\vec{OB}|^2 - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{20 \times 34 - 22^2} = 7$$

$$\text{別解 } \vec{OA} = (2, -4), \vec{OB} = (5, -3) \text{ であるから}$$

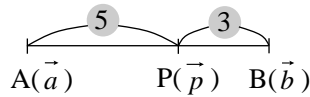
$$S = \frac{1}{2} |2 \times (-3) - (-4) \times 5| = 7$$

12

- (1) 2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB に対して, 次の点の位置ベクトルを \vec{a} , \vec{b} を用いてそれぞれ表せ。
 ① 5:3 に内分する点 $P(\vec{p})$ ② 中点 $M(\vec{m})$ ③ 5:3 に外分する点 $Q(\vec{q})$
- (2) 3点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle ABC$ において, 重心を G とする。 $\triangle GBC$ の重心 $G'(\vec{g}')$ を, \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。

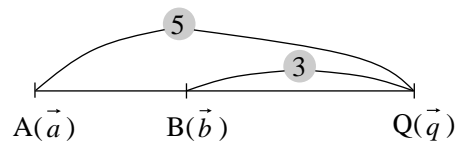
解答

(1) ① $\vec{p} = \frac{3\vec{a}+5\vec{b}}{5+3} = \frac{3\vec{a}+5\vec{b}}{8}$



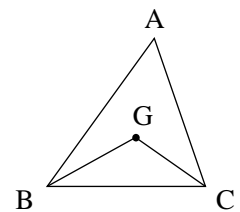
② $\vec{m} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

③ $\vec{q} = \frac{-3\vec{a}+5\vec{b}}{5-3} = \frac{-3\vec{a}+5\vec{b}}{2}$



(2) 点 $G(\vec{g})$ とすると $\vec{g} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

よって, $\triangle GBC$ の重心 $G'(\vec{g}')$ は $\vec{g}' = \frac{\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} + \vec{b} + \vec{c}}{3} = \frac{\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{c}}{9}$



13

△ABC において、辺 AB を 1 : 3 に内分する点を P、辺 BC を 6 : 1 に外分する点を Q、辺 AC を 2 : 1 に内分する点を R とするとき、3 点 P、R、Q は一直線上にあることを証明せよ。

証明

$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とすると

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}\vec{c}$$

よって $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{b} = \frac{1}{12}(-3\vec{b} + 8\vec{c})$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AB} + \frac{6}{5}\overrightarrow{BC} \\ &= \vec{b} + \frac{6}{5}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{-\vec{b} + 6\vec{c}}{5} \end{aligned}$$

よって $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \frac{-\vec{b} + 6\vec{c}}{5} - \frac{1}{4}\vec{b} = \frac{-4\vec{b} + 24\vec{c} - 5\vec{b}}{20} = \frac{3}{20}(-3\vec{b} + 8\vec{c})$

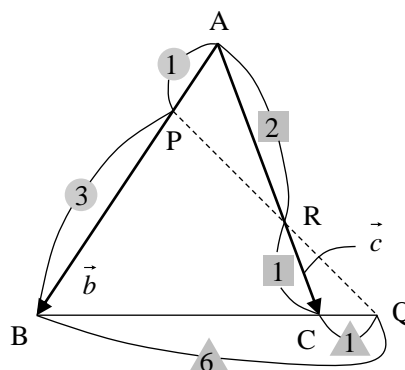
したがって、 $\overrightarrow{PQ} = \frac{9}{5}\overrightarrow{PR}$ であるから、3 点 P、R、Q は一直線上にある。

別証明 (メネラウスの定理の逆を用いる。)

△ABC の辺またはその延長上の 3 点 P、R、Q に対して

$$\frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} \cdot \frac{AP}{PB} = \frac{6}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = 1$$

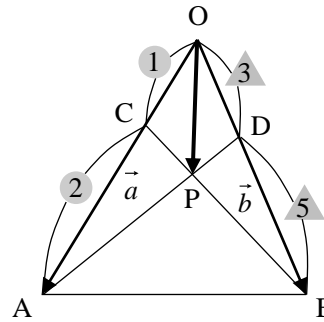
よって、メネラウスの定理の逆により、3 点 P、R、Q は一直線上にある。



14

△OABにおいて、辺OAを1:2に内分する点をC、辺OBを3:5に内分する点をDとし、線分ADとBCの交点をPとする。

$\vec{OA} = \vec{a}$ 、 $\vec{OB} = \vec{b}$ とするとき、 \vec{OP} を \vec{a} 、 \vec{b} を用いて表せ。



解答

点Pは線分AD上にあるから、実数sを用いて $AP : PD = s : (1-s)$

とすると $\vec{OP} = s\vec{OD} + (1-s)\vec{OA} = (1-s)\vec{a} + \frac{3}{8}s\vec{b}$ ……①

また、点Pは線分BC上にあるから、実数tを用いて $BP : PC = t : (1-t)$

とすると $\vec{OP} = (1-t)\vec{OB} + t\vec{OC} = \frac{1}{3}t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$ ……②

①, ②から $(1-s)\vec{a} + \frac{3}{8}s\vec{b} = \frac{1}{3}t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$

$\vec{a} \neq \vec{0}$ 、 $\vec{b} \neq \vec{0}$ 、 $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ であるから $\begin{cases} 1-s = \frac{1}{3}t \\ \frac{3}{8}s = 1-t \end{cases}$

これを解くと $s = \frac{16}{21}$ 、 $t = \frac{5}{7}$ したがって $\vec{OP} = \frac{5}{21}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b}$

15

△ABCにおいて、外心をOとし、点Hを

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$$

を満たす点とする。

このとき、点Hは△ABCの垂心であることを証明せよ。

証明

$$\begin{aligned} \vec{AH} \cdot \vec{BC} &= (\vec{OH} - \vec{OA}) \cdot (\vec{OC} - \vec{OB}) = (\vec{OB} + \vec{OC}) \cdot (\vec{OC} - \vec{OB}) \\ &= |\vec{OC}|^2 - |\vec{OB}|^2 \end{aligned} \quad \dots\dots①$$

$$\begin{aligned} \vec{BH} \cdot \vec{CA} &= (\vec{OH} - \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} - \vec{OC}) = (\vec{OA} + \vec{OC}) \cdot (\vec{OA} - \vec{OC}) \\ &= |\vec{OA}|^2 - |\vec{OC}|^2 \end{aligned} \quad \dots\dots②$$

$$\begin{aligned} \vec{CH} \cdot \vec{AB} &= (\vec{OH} - \vec{OC}) \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) = (\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) \\ &= |\vec{OB}|^2 - |\vec{OA}|^2 \end{aligned} \quad \dots\dots③$$

$\begin{aligned} \vec{OH} &= \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} \text{ から} \\ \vec{OH} - \vec{OA} &= \vec{OB} + \vec{OC} \\ \vec{OH} - \vec{OB} &= \vec{OA} + \vec{OC} \\ \vec{OH} - \vec{OC} &= \vec{OA} + \vec{OB} \end{aligned}$

点Oは△ABCの外心であるから $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}|$

よって、①、②、③より

$$|\vec{OC}|^2 - |\vec{OB}|^2 = 0, \quad |\vec{OA}|^2 - |\vec{OC}|^2 = 0, \quad |\vec{OB}|^2 - |\vec{OA}|^2 = 0$$

したがって $\vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0, \quad \vec{BH} \cdot \vec{CA} = 0, \quad \vec{CH} \cdot \vec{AB} = 0$

ここで、点Hが△ABCの各頂点と異なる点のとき、すなわち、 $\vec{AH} \neq \vec{0}, \vec{BH} \neq \vec{0}, \vec{CH} \neq \vec{0}$ のとき

$$\vec{AH} \perp \vec{BC}, \quad \vec{BH} \perp \vec{CA}, \quad \vec{CH} \perp \vec{AB}$$

また、点Hが点Aに一致するとき、 $\vec{BH} \cdot \vec{CA} = 0, \vec{CH} \cdot \vec{AB} = 0$ より $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$

よって、△ABCは $\angle A = 90^\circ$ の直角三角形で、垂心は点Aである。

同様に、点Hが点Bに一致するとき、△ABCは $\angle B = 90^\circ$ の直角三角形で、垂心は点B、

点Hが点Cに一致するとき、△ABCは $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形で、垂心は点Cである。

以上より、点Hは△ABCの垂心である。

17

$\triangle OAB$ に対して、 $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ とする。実数 s, t が次の条件を満たしながら動くとき、点 P の存在範囲を求めよ。

(1) $s+3t=2, s \geq 0, t \geq 0$

(2) $s+3t \leq 2, s \geq 0, t \geq 0$

解答

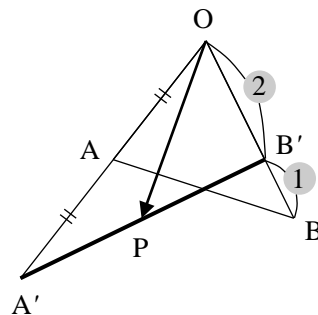
(1) $s+3t=2$ より $\frac{s}{2} + \frac{3}{2}t = 1$

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = \frac{s}{2}(2\overrightarrow{OA}) + \frac{3}{2}t\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right)$$

ここで、 $\frac{s}{2} = s', \frac{3}{2}t = t'$ とおくと

$$\overrightarrow{OP} = s'(2\overrightarrow{OA}) + t'\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right) \quad s' + t' = 1, s' \geq 0, t' \geq 0$$

したがって、 $2\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}$ となるような点 A' 、 $\frac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$ となるような点 B' をとると、点 P の存在範囲は線分 $A'B'$ である。



(2) $s+3t \leq 2$ より $\frac{s}{2} + \frac{3}{2}t \leq 1$

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = \frac{s}{2}(2\overrightarrow{OA}) + \frac{3}{2}t\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right)$$

ここで、 $\frac{s}{2} = s', \frac{3}{2}t = t'$ とおくと

$$\overrightarrow{OP} = s'(2\overrightarrow{OA}) + t'\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right) \quad s' + t' \leq 1, s' \geq 0, t' \geq 0$$

したがって、 $2\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}$ となるような点 A' 、 $\frac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$ となるような点 B' をとると、点 P の存在範囲は $\triangle OA'B'$ の周上および内部である。

