平面上のベクトル

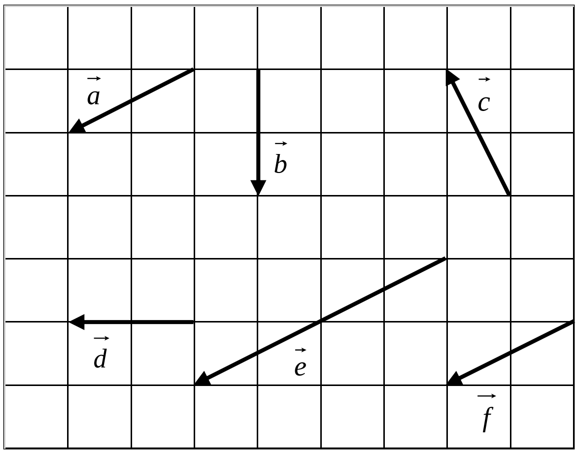
$\boxed{1}$

右の図において，次のベクトルを選べ。

(1)　等しいベクトル

(2)　大きさが等しいベクトル

(3)　向きが等しいベクトル



解答

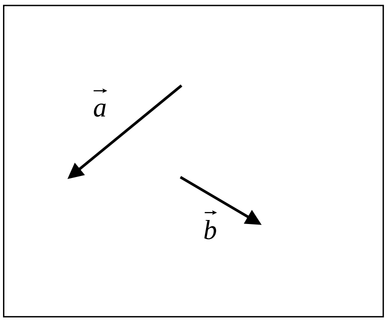
(1)　$\vec{a}$ と $\vec{f}$

(2)　$\vec{a}$ と $\vec{c}$ と $\vec{f}$， $\vec{b}$ と $\vec{d}$

(3)　$\vec{a}$ と $\vec{e}$ と $\vec{f}$

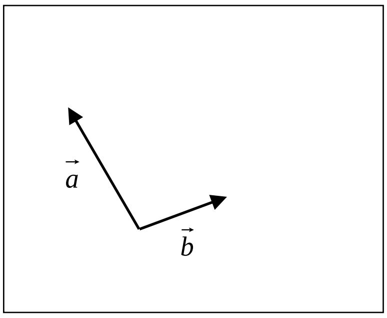
2

(1)　右の図の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，
$\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$ を図示せよ。



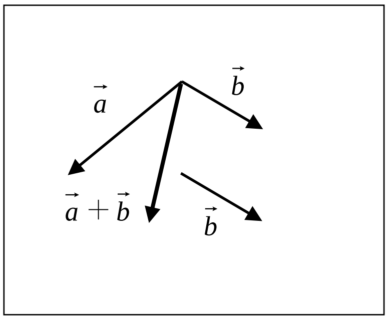
(2)　右の図の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，
次のベクトルを図示せよ。

①　$\frac{1}{2}\vec{a}$　　　②　$\vec{a}-2\vec{b}$

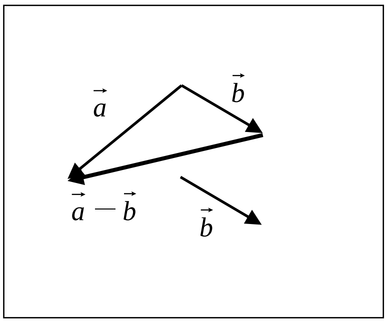


解答

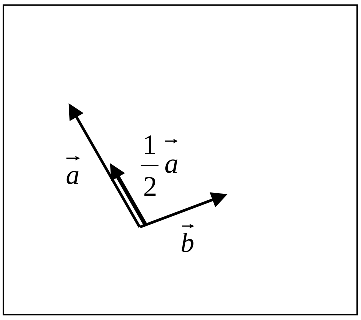
(1)　$\vec{a}+\vec{b}$



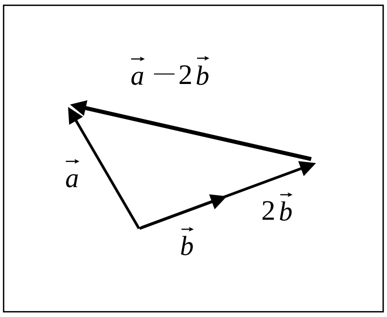
$\vec{a}-\vec{b}$



(2)　①　$\frac{1}{2}\vec{a}$



②　$\vec{a}-2\vec{b}$



$\boxed{3}$

次の問いに答えよ。

(1)　等式 $2(\vec{a}+2\vec{x})-4\vec{a}=5(\vec{x}-3\vec{b})$ を満たすベクトル $\vec{x}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　等式 $\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}$，$3\vec{x}+2\vec{y}=\vec{b}$ を満たすベクトル $\vec{x}$，$\vec{y}$ を，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いてそれぞれ表せ。

解答

(1)　展開すると　$2\vec{a}+4\vec{x}-4\vec{a}=5\vec{x}-15\vec{b}$　　よって　$\boldsymbol{\vec{x}=-2\vec{a}+15\vec{b}}$

(2)　$\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}$ ……①，　$3\vec{x}+2\vec{y}=\vec{b}$　……②　とおく。

①×2－②から　$-\vec{x}=2\vec{a}-\vec{b}$　　よって　$\boldsymbol{\vec{x}=-2\vec{a}+\vec{b}}$

これを①に代入すると　$-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{y}=\vec{a}$　　よって　$\boldsymbol{\vec{y}=3\vec{a}-\vec{b}}$

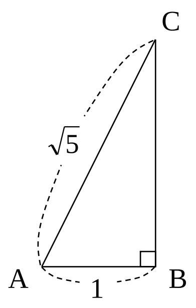
$\boxed{\vec{y}\text{の別解}}$　①×3－②から　$\vec{y}=3\vec{a}-\vec{b}$

$\boxed{4}$

右の図のような直角三角形 ABC において，

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と平行な単位ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を

用いて表せ。



解答

$\mathrm{BC}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　より，求める単位ベクトルは

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|}=\boldsymbol{\frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{2}},\quad -\frac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|}=\boldsymbol{-\frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{2}}$$

$\boxed{5}$

$\vec{a}=(2,\ -4)$，$\vec{b}=(5,\ -3)$のとき，$-3\vec{a}+2\vec{b}$を成分で表せ。また，その大きさを求めよ。

解答

$-3\vec{a}+2\vec{b}=-3(2,\ -4)+2(5,\ -3)=(-6,\ 12)+(10,\ -6)=\mathbf{(4,\ 6)}$

$|-3\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{4^2+6^2}=\mathbf{2\sqrt{13}}$

$\boxed{6}$

$\vec{a}=(2,\ -4)$，$\vec{b}=(5,\ -3)$のとき，$\vec{p}=(7,\ 0)$を$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$の形で表せ。

解答

$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$を成分で表すと　$(7,\ 0)=s(2,\ -4)+t(5,\ -3)=(2s+5t,\ -4s-3t)$

よって　$\begin{cases} 7=2s+5t \\ 0=-4s-3t \end{cases}$　これを解いて　$s=-\dfrac{3}{2}$，$t=2$

したがって　$\boldsymbol{\vec{p}=-\dfrac{3}{2}\vec{a}+2\vec{b}}$

7

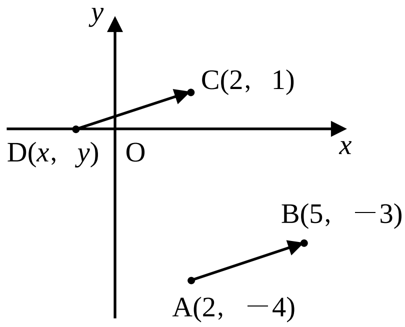
次の問いに答えよ。

(1)　4 点 A(2，−4)，B(5，−3)，C(2，1)，D を頂点とする平行四辺形 ABCD がある。頂点 D の座標を求めよ。

(2)　2 つのベクトル $\vec{a}=(2,\ -4)$，$\vec{b}=(5+t,\ -3-t)$が平行になるように，t の値を定めよ。

解答

(1)　頂点 D の座標を$(x,\ y)$とおく。



四角形 ABCD が平行四辺形であるから

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

ここで　$\overrightarrow{AB}=(5-2,\ -3-(-4))=(3,\ 1)$

$\overrightarrow{DC}=(2-x,\ 1-y)$

よって　$\begin{cases}3=2-x\\1=1-y\end{cases}$　これを解いて　$x=-1$，$y=0$

したがって　**D(−1，0)**

(2)　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ より，$\vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k があるから

$(5+t,\ -3-t)=k(2,\ -4)$

よって　$\begin{cases}5+t=2k\\-3-t=-4k\end{cases}$　これを解いて　$k=-1$，$t=-7$

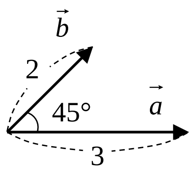
したがって　$\boldsymbol{t=-7}$

8

次の内積を求めよ。

(1)　$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 45°

のときの，内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$



(2)　$\vec{a}=(2,\ -4)$，$\vec{b}=(5,\ 3)$のときの，内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$

解答

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos45^\circ=3\times2\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{3\sqrt{2}}$

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times5+(-4)\times3=\boldsymbol{-2}$

$\boxed{9}$

次の問いに答えよ。

(1)　2 つのベクトル $\vec{a}=(3,\ 7)$，$\vec{b}=(-5,\ -2)$ のなす角 θ を求めよ。

(2)　$\vec{a}=(2,\ -4)$，$\vec{b}=(5+x,\ 3+x)$ が垂直であるとき，x の値を求めよ。

解答

(1)　$\cos\theta=\dfrac{3\times(-5)+7\times(-2)}{\sqrt{3^2+7^2}\sqrt{(-5)^2+(-2)^2}}=\dfrac{-29}{\sqrt{58}\sqrt{29}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\boldsymbol{\theta=135°}$

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(5+x)+(-4)\times(3+x)=10+2x-12-4x=-2x-2$

$\vec{a}\perp\vec{b}$ となるには，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ となればよいので　$-2x-2=0$　　よって　$\boldsymbol{x=-1}$

$\boxed{１０}$

$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$|\vec{a}+2\vec{b}|=7$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。ただし，$0°\leqq\theta\leqq180°$ とする。

解答

$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=3^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\times4^2=73+4\vec{a}\cdot\vec{b}$

これと，$|\vec{a}+2\vec{b}|=7$ から　$73+4\vec{a}\cdot\vec{b}=49$　　よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-6}{3\cdot4}=-\dfrac{1}{2}$　　$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\boldsymbol{\theta=120°}$

$\boxed{１１}$

3 点 O(0，0)，A(2，-4)，B(5，-3)を頂点とする三角形の面積 S を求めよ。

解答

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ -4)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(5,\ -3)$ であるから

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=2^2+(-4)^2=20$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=5^2+(-3)^2=34$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\times5+(-4)\times(-1)=22$

よって　$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{20\times34-22^2}=\boldsymbol{7}$

$\boxed{\text{別解}}$　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ -4)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(5,\ -3)$ であるから

$$S=\frac{1}{2}|2\times(-3)-(-4)\times5|=7$$

１２

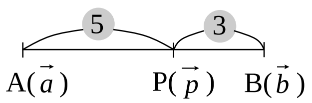
(1)　2 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)を結ぶ線分 AB に対して，次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いてそれぞれ表せ。

①　5 : 3 に内分する点 P($\vec{p}$)　　②　中点 M($\vec{m}$)　　③　5 : 3 に外分する点 Q($\vec{q}$)

(2)　3 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)を頂点とする△ABC において，重心を G とする。△GBC の重心 G′ ($\vec{g'}$)を，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

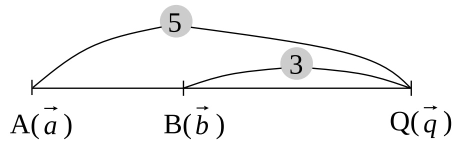
解答

(1)　①　$\vec{p}=\dfrac{3\vec{a}+5\vec{b}}{5+3}=\boldsymbol{\dfrac{3\vec{a}+5\vec{b}}{8}}$



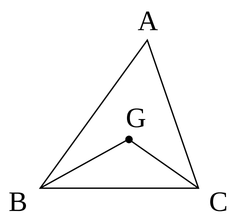
②　$\vec{m}=\boldsymbol{\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}}$

③　$\vec{q}=\dfrac{-3\vec{a}+5\vec{b}}{5-3}=\boldsymbol{\dfrac{-3\vec{a}+5\vec{b}}{2}}$



(2)　点 G($\vec{g}$)とすると　$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

よって，△GBC の重心 G′ ($\vec{g'}$)は　$\vec{g'}=\dfrac{\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\boldsymbol{\dfrac{\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{c}}{9}}$



１３

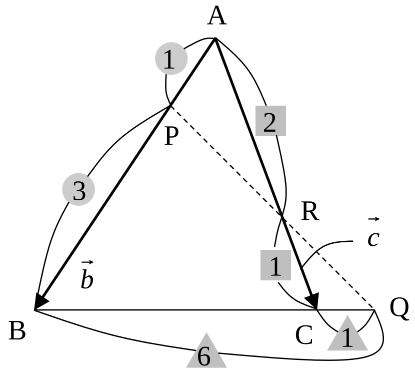
△ABC において，辺 AB を 1 : 3 に内分する点を P，辺 BC を 6 : 1 に外分する点を Q，辺 AC を 2 : 1 に内分する点を R とするとき，3 点 P，R，Q は一直線上にあることを証明せよ。

証明

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とすると

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AR}=\frac{2}{3}\vec{c}$$



よって　$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\vec{c}-\frac{1}{4}\vec{b}=\frac{1}{12}(-3\vec{b}+8\vec{c})$

$$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AB}+\frac{6}{5}\overrightarrow{BC}$$

$$=\vec{b}+\frac{6}{5}(\vec{c}-\vec{b})=\frac{-\vec{b}+6\vec{c}}{5}$$

よって　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\frac{-\vec{b}+6\vec{c}}{5}-\frac{1}{4}\vec{b}=\frac{-4\vec{b}+24\vec{c}-5\vec{b}}{20}=\frac{3}{20}(-3\vec{b}+8\vec{c})$

したがって，$\overrightarrow{PQ}=\frac{9}{5}\overrightarrow{PR}$ であるから，3 点 P，R，Q は一直線上にある。

別証明　（メネラウスの定理の逆を用いる。）

△ABC の辺またはその延長上の 3 点 P，R，Q に対して

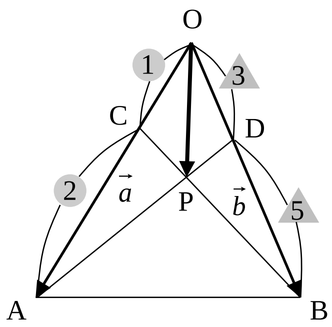
$$\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}\cdot\frac{AP}{PB}=\frac{6}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=1$$

よって，メネラウスの定理の逆により，3 点 P，R，Q は一直線上にある。

１４

△OAB において，辺 OA を 1 : 2 に内分する点を C，辺 OB を 3 : 5 に内分する点を D とし，線分 AD と BC の交点を P とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



解答

点 P は線分 AD 上にあるから，実数 s を用いて　AP : PD＝s : $(1-s)$

とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OD}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1-s)\vec{a}+\frac{3}{8}s\vec{b}$　……①

また，点 P は線分 BC 上にあるから，実数 t を用いて　BP : PC＝t : $(1-t)$

とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{3}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$　……②

①，②から　$(1-s)\vec{a}+\frac{3}{8}s\vec{b}=\frac{1}{3}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから　$\begin{cases}1-s=\frac{1}{3}t\\ \frac{3}{8}s=1-t\end{cases}$

これを解くと　$s=\frac{16}{21}$，$t=\frac{5}{7}$　　したがって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{5}{21}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}}$

１５

△ABC において，外心を O とし，点 H を

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

を満たす点とする。

このとき，点 H は△ABC の垂心であることを証明せよ。

証明

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$

$=|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2$ ……①

$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})$

$=|\overrightarrow{OA}|^2-|\overrightarrow{OC}|^2$ ……②

$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$=|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{OA}|^2$ ……③

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ から
$\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$
$\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$
$\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

点 O は△ABC の外心であるから　$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$

よって，①，②，③より

$|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2=0$，　$|\overrightarrow{OA}|^2-|\overrightarrow{OC}|^2=0$，　$|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{OA}|^2=0$

したがって　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，　$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=0$，　$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

ここで，点 H が△ABC の各頂点と異なる点のとき，すなわち，$\overrightarrow{AH}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{BH}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{CH}\neq\vec{0}$ のとき

AH⊥BC，　BH⊥CA，　CH⊥AB

また，点 H が点 A に一致するとき，$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=0$，$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

よって，△ABC は∠A＝90° の直角三角形で，垂心は点 A である。

同様に，点 H が点 B に一致するとき，△ABC は∠B＝90° の直角三角形で，垂心は点 B,

点 H が点 C に一致するとき，△ABC は∠C＝90° の直角三角形で，垂心は点 C

である。

以上より，点 H は△ABC の垂心である。

１６

(1)　点 A(1，0)を通り，方向ベクトルが$\vec{u}$＝(5，－3)である直線 l を，媒介変数 t を用いて表示せよ。
また，直線 l の方程式を求めよ。

(2)　2 点(2，－4)，B(5，－3)を通る直線 l を，媒介変数 t を用いて表示せよ。
また，直線 l の方程式を求めよ。

(3)　点 A(0，1)を通り，法線ベクトルが$\vec{n}$＝(5，－3)である直線 l の方程式を求めよ。

(4)　定点 A($\vec{a}$)と動点 P($\vec{p}$)に対して，次のベクトル方程式で表される円の中心の位置ベクトルと半径を求めよ。

①　$|\vec{p}+3\vec{a}|=1$　　　②　$\vec{p}\cdot(\vec{p}-2\vec{a})=0$

解答

(1)　直線 l 上の任意の点を P(x，y)とし，点 P の位置ベクトルを$\vec{p}$とすると，$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u}$ から

$(x,\ y)=(1,\ 0)+t(5,\ -3)=(1+5t,\ -3t)$　　よって　$\begin{cases}\boldsymbol{x=1+5t}\\ \boldsymbol{y=-3t}\end{cases}$

$5t=x-1$ から　$t=\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}$　　したがって，求める直線 l の方程式は　$\boldsymbol{y=-\frac{3}{5}x+\frac{3}{5}}$

(2)　直線 l 上の任意の点を P(x，y)とし，点 P の位置ベクトルを$\vec{p}$とすると，$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ から

$(x,\ y)=(1-t)(2,\ -4)+t(5,\ -3)=(2(1-t)+5t,\ -4(1-t)-3t)=(2+3t,\ -4+t)$

よって　$\begin{cases}\boldsymbol{x=3t+2}\\ \boldsymbol{y=t-4}\end{cases}$

$3t=x-2$ から　$t=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$　　したがって，求める直線 l の方程式は　$\boldsymbol{y=\frac{1}{3}x-\frac{14}{3}}$

(3)　直線 l 上の任意の点を P(x，y)とし，点 P の位置ベクトルを$\vec{p}$とすると，$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$ から

$(5,\ -3)\cdot((x,\ y)-(0,\ 1))=(5,\ -3)\cdot(x,\ y-1)=5x-3(y-1)=5x-3y+3$

よって，求める直線 l の方程式は　$\boldsymbol{5x-3y+3=0}$

〈注意〉点 A の座標を$(x_1,\ y_1)$，点 P の座標を$(x,\ y)$，$\vec{n}=(a,\ b)$とすると，$\vec{p}-\vec{a}=(x-x_1,\ y-y_1)$から

$$\boldsymbol{a(x-x_1)+b(y-y_1)=0}$$

となる。これを本問に用いると　$5(x-0)-3(y-1)=0$　　よって　$5x-3y+3=0$

(4)　①　**中心の位置ベクトルは**$\boldsymbol{-3\vec{a}}$**，半径は 1**

②　$\vec{p}\cdot(\vec{p}-2\vec{a})=0$ を変形すると　$\vec{p}\cdot\vec{p}-2\vec{p}\cdot\vec{a}=0$

両辺に$\vec{a}\cdot\vec{a}$を加えると　$\vec{p}\cdot\vec{p}-2\vec{p}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{a}$

これから　$|\vec{p}-\vec{a}|^2=|\vec{a}|^2$　　すなわち　$|\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{a}|$

$|\vec{p}-○|^2=$～
という形になるように変形する。

したがって，**中心の位置ベクトルは**$\boldsymbol{\vec{a}}$**，半径は**$\boldsymbol{|\vec{a}|}$

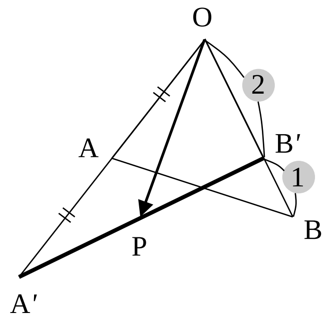
$\vec{p}\cdot(\vec{p}-2\vec{a})=0$ は，$\vec{0}$，$2\vec{a}$を直径の両端とする円になっている。
一般に，$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$ は，$\vec{a}$，$\vec{b}$を直径の両端とする円のベクトル方程式である。

１７

△OAB に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。実数 s，t が次の条件を満たしながら動くとき，点 P の存在範囲を求めよ。

(1)　$s+3t=2$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$　　　(2)　$s+3t\leqq 2$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

解答



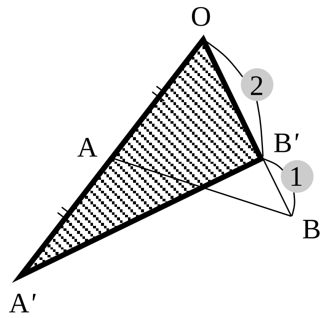
(1)　$s+3t=2$ より　$\dfrac{s}{2}+\dfrac{3}{2}t=1$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{s}{2}(2\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\frac{3}{2}t\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

ここで，$\dfrac{s}{2}=s'$，$\dfrac{3}{2}t=t'$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'(2\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t'\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\qquad s'+t'=1,\ s'\geqq 0,\ t'\geqq 0$$

したがって，**$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ となるような点 A′，$\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ となるような点 B′ をとると，点 P の存在範囲は線分 A′B′ である。**



(2)　$s+3t\leqq 2$ より　$\dfrac{s}{2}+\dfrac{3}{2}t\leqq 1$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{s}{2}(2\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\frac{3}{2}t\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

ここで，$\dfrac{s}{2}=s'$，$\dfrac{3}{2}t=t'$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s'(2\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t'\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\qquad s'+t'\leqq 1,\ s'\geqq 0,\ t'\geqq 0$$

したがって，**$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ となるような点 A′，$\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ となるような点 B′ をとると，点 P の存在範囲は△OA′B′ の周上および内部である。**