

確率

1

- (1) 2枚の硬貨を同時に投げるとき、表が1枚出る確率を求めよ。
 (2) 2個のさいころを同時に投げるとき、目の積が12となる確率を求めよ。

解答

- (1) 起こり得るすべての場合の数は

$$2^2=4 \text{ (通り)}$$

このうち、表が1枚出るのは

(表, 裏), (裏, 表)

の2通り。

よって、求める確率は $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

- (2) 目の出方は全部で $6 \times 6 = 36$ (通り)

このうち、目の積が12になるのは, (2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2) の4通り。

よって、求める確率は $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

2枚の硬貨は区別して考える。全事象は

(表, 表), (表, 裏), (裏, 表), (裏, 裏)

の4通りで、これらの根元事象は同様に確からしい。

2枚の硬貨を区別せずに考え、全事象を

(表, 表), (表, 裏), (裏, 裏)

の3通りとすると、(表, 表) と (表, 裏) は同様に確からしくないため、確率を計算することができない。

2

- 男子3人と女子3人が1列に並ぶとき、男子と女子が交互に並ぶ確率を求めよ。

解答

6人が1列に並ぶ並び方は $6!$ 通り。

このうち、男子と女子が交互に並ぶのは

男 女 男 女 男 女 女 男 女 男 女 男

の2つの場合がある。いずれの場合にも、男子の並び方は $3!$ 通り、そのおのおのに対して女子の並び方は $3!$ 通りずつあるから $2 \times 3! \times 3!$ 通りある。

よって、求める確率は $\frac{2 \times 3! \times 3!}{6!} = \frac{2 \times 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{10}$

3

- 当たり3本を含む10本のくじから、同時に3本のくじを引くとき、当たりをちょうど1本引く確率を求めよ。

解答

くじは全て区別できると考え、10本のくじから3本を引く場合の数は ${}_{10}C_3$ 通り。

このうち、当たり3本から1本、はずれ7本から2本を引く場合の数は ${}_3C_1 \times {}_7C_2$ (通り)

$$\text{よって、求める確率は } \frac{{}_3C_1 \times {}_7C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{3 \times \frac{7 \cdot 6}{2}}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{21}{40}$$

4

3人でじゃんけんを1回するとき、あいこになる確率を求めよ。

解答

3人の手の出し方は全部で $3^3=27$ (通り)

あいこになるのは、3人全員が同じ手になるときと、3人全員がそれぞれ異なる手になるときであり、これらの事象は互いに排反である。

(i) 3人全員が同じ手になる確率

全員が「グー」、または「チョキ」、または「パー」になるときであるから $\frac{3}{27}$

(ii) 3人全員がそれぞれ異なる手になる確率

3人で3種類の手(グー、チョキ、パー)を出す場合の数は $3!=6$ (通り) であるから $\frac{6}{27}$

したがって、あいこになる確率は $\frac{3}{27} + \frac{6}{27} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$

5

1から50までの番号が書かれた50枚のカードから1枚引くとき、その番号が3または7で割り切れる確率を求めよ。

解答

50枚のカードから

3で割り切れる番号を引く事象 A の起こる場合の数は $A = \{3 \cdot 1, 3 \cdot 2, \dots, 3 \cdot 16\}$ から 16通り

7で割り切れる番号を引く事象 B の起こる場合の数は $B = \{7 \cdot 1, 7 \cdot 2, \dots, 7 \cdot 7\}$ から 7通り

また、積事象 $A \cap B$ は21で割り切れる番号を引く事象であるから $A \cap B = \{21 \cdot 1, 21 \cdot 2\}$ より 2通り

よって、求める確率は $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{16}{50} + \frac{7}{50} - \frac{2}{50} = \frac{21}{50}$

6

- (1) 12個の製品の中に3個の不良品が含まれている。この中から2個取り出すとき、不良品が含まれる確率を求めよ。
- (2) 3個のさいころを同時に投げるとき、次の確率を求めよ。
- ① 出た目の最大値が4以下である確率
 - ② 出た目の最大値が4である確率

解答

(1) 不良品が含まれるという事象は、2個とも不良品ではない事象 A の余事象 \bar{A} である。

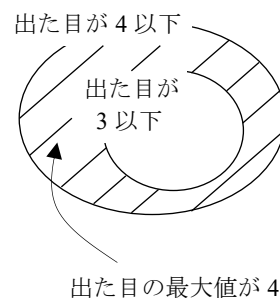
$$P(A) = \frac{{}_9C_2}{{}_{12}C_2} = \frac{9 \cdot 8}{12 \cdot 11} = \frac{6}{11} \quad \text{であるから、求める確率は} \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11}$$

- (2) ① 3個のさいころを同時に投げるとき、起こり得るすべての場合の数は 6^3 通り。
さいころの出た目の最大値が4以下であるのは、3個のさいころの出た目すべてが4以下である場合である。その場合の数は 4^3 通り。

$$\text{よって、求める確率は} \quad \frac{4^3}{6^3} = \frac{8}{27}$$

- ② 3個のさいころの出た目すべてが3以下である場合は 3^3 通り。
さいころの出た目の最大値が4である場合の数は
(出た目が4以下の場合の数) - (出た目が3以下の場合の数)
であるから $4^3 - 3^3$ 通り。

$$\text{よって、求める確率は} \quad \frac{4^3 - 3^3}{6^3} = \frac{37}{216}$$



7

袋Aには赤玉3個と白玉5個、袋Bには赤玉4個と白玉2個が入っている。袋Aから1個、袋Bから1個の玉を取り出すとき、2個が異なる色の玉である確率を求めよ。

解答

袋Aから玉を取り出す試行と、袋Bから玉を取り出す試行は独立である。

2個が異なる色になるのは、袋Aから赤玉、袋Bから白玉を取り出すときと、袋Aから白玉、袋Bから赤玉を取り出すときであり、これらの事象は互いに排反である。

(i) 袋Aから赤玉, 袋Bから白玉を取り出す確率

$$\text{袋Aから赤玉1個を取り出す確率は } \frac{3}{8}, \quad \text{袋Bから白玉1個を取り出す確率は } \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\text{よって, 袋Aから赤玉, 袋Bから白玉を取り出す確率は } \frac{3}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{24}$$

(ii) 袋Aから白玉, 袋Bから赤玉を取り出す確率

$$\text{袋Aから白玉1個を取り出す確率は } \frac{5}{8}, \quad \text{袋Bから赤玉1個を取り出す確率は } \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

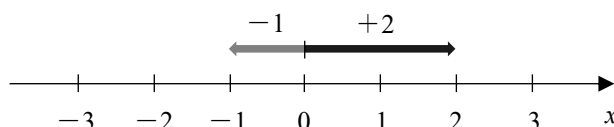
$$\text{よって, 袋Aから白玉, 袋Bから赤玉を取り出す確率は } \frac{5}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{24}$$

$$\text{したがって, 2個が異なる色になる確率は } \frac{3}{24} + \frac{10}{24} = \frac{13}{24}$$

8

(1) x 軸上に点Pがある。1個のさいころ

を投げて, 3の倍数の目が出たとき, Pは
 x 軸上の正の方向に2だけ進み, 3の倍数
でない目が出たとき, Pは x 軸の負の方向
に1だけ進むことにする。さいころを5回



投げたとき, 原点から出発したPが $x=1$ の点にある確率を求めよ。

(2) A, Bの2チームがバレーボールの試合をする。先に3セットを先取した方を優勝とするとき, 次の確率を求めよ。ただし, 1セットのゲームでAがBに勝つ確率は $\frac{2}{3}$, BがAに勝つ確率は $\frac{1}{3}$ であるとする。

- ① 3セット目でAが優勝する確率
- ② 4セット目でAが優勝する確率
- ③ Aが優勝する確率

(3) 6枚の硬貨を投げるとき, 表が3枚, 裏が3枚となる確率を求めよ。

解答

(1) さいころを5回投げて, 3の倍数の目が出る回数を r とすると, 3の倍数でない目が出る回数は $5-r$ である。このとき, 点Pの x 座標は $x=2 \times r + (-1) \times (5-r) = 3r-5$

$$x=1 \text{ を代入すると } 1=3r-5 \text{ より } r=2$$

よって, 3の倍数の目がちょうど2回出る確率を求めればよい。

$$\text{さいころを1回投げたとき, 3の倍数の目が出る確率は } \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

3の倍数の目	: 3, 6
3の倍数でない目	: 1, 2, 4, 5

$$\text{したがって, 求める確率は } {}_5C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(1-\frac{1}{3}\right)^{5-2} = \frac{5 \cdot 4}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$$

(2) ① 3セット目でAが優勝するのは

Aが3連勝する

$$\text{ときであるから } \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

② 4セット目でAが優勝するのは

3セット目までにAが2勝し、

4セット目にAが勝つ

$$\begin{aligned} \text{ときであるから } {}_3C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \\ = \frac{8}{27} \end{aligned}$$

Aが3勝1敗なので ${}_4C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3}$ とするのは誤り。

これはAが勝勝勝敗となる場合も含まれ、このときは3セット目で優勝が決まるので、4セット目は無効となる。

最終セットは、優勝するチームが勝つことに注意する。

③ Aが優勝するのは

(i) 3セット目 (ii) 4セット目 (iii) 5セット目

で優勝する場合があります、これらは互いに排反である。

①, ②から、(i)の確率は $\frac{8}{27}$, (ii)の確率は $\frac{8}{27}$ であるから、(iii)の確率を求め

ればよい。5セット目でAが優勝するのは

4セット目までにAが2勝し、5セット目にAが勝つ

$$\text{ときであるから } {}_4C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{16}{81}$$

したがって、求める確率は $\frac{8}{27} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} = \frac{64}{81}$

(3) 求める確率は、1枚の硬貨を6回投げるとき、表が3枚、裏が3枚出る確率と同じであり、反復試行の確率として考えることができる。

表が出る確率も裏が出る確率も $\frac{1}{2}$ であるから、

$$\begin{aligned} \text{求める確率は } {}_6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 &= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \\ &= \frac{5}{16} \end{aligned}$$

例えば、○×式の問題が6題あり、でたらめに○印と×印を付けるとき、3題正解する確率や、6人がゲーとパーで2つのグループに分かれるとき、1回でちょうど3人ずつに分かれる確率も、同様の計算で $\frac{5}{16}$ である。

9

当たり 4 本を含む 10 本のくじがある。最初に a が 1 本引き、それをもとに戻さないで次に b が 1 本引くとき、b が当たりくじを引く確率を求めよ。

解答

a が当たりくじを引く事象を A ,

b が当たりくじを引く事象を B

とする。b が当たりくじを引く場合は、次の 2 通りある。

(i) a が当たりくじを引き、b も当たりくじを引く場合

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{90}$$

(ii) a がはずれくじを引き、b が当たりくじを引く場合

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{24}{90}$$

(i) と (ii) は互いに排反であるから、求める確率は

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{12}{90} + \frac{24}{90} = \frac{36}{90} = \frac{2}{5}$$

10

あるスーパーマーケットでは、午後 7 時の時点で、700 円の弁当が右の表の確率で値引きされている。この弁当の午後 7 時の時点での期待される金額を求めよ。

また、この弁当が午後 7 時に 2 割引きで売られている場合、買った方がよいか、買わない方がよいか。

値引き率	確率
5 割引き	$\frac{1}{10}$
2 割引き	$\frac{6}{10}$
値引きなし	$\frac{3}{10}$
計	1

解答

求める金額は

$$700 \times (1 - 0.5) \times \frac{1}{10} + 700 \times (1 - 0.2) \times \frac{6}{10} + 700 \times \frac{3}{10} = \frac{350 + 3360 + 2100}{10} = 581 \text{ (円)}$$

また、この弁当の 2 割引きの値段は $700 \times (1 - 0.2) = 560$ (円)

これは弁当の期待される金額より安いので、買った方がよい。

研究

同じ製品を製造している2つの機械 A, B があり, 機械 A の製品には 0.3%, 機械 B の製品には 0.1% の不良品が含まれている。機械 A の製品を 400 個, 機械 B の製品を 600 個抜き出し, よくかき混ぜたあとで 1 個の製品を取り出すとき, 次の確率を求めよ。

- (1) 不良品である確率
- (2) 不良品であったとき, それが機械 A の製品である確率

解答

- (1) 取り出した 1 個が, 機械 A の製品である事象を A ,
機械 B の製品である事象を B ,
不良品である事象を E

とする。 $P(A) = \frac{400}{1000}$, $P(B) = \frac{600}{1000}$, $P_A(E) = \frac{3}{1000}$, $P_B(E) = \frac{1}{1000}$

よって $P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E) = P(A)P_A(E) + P(B)P_B(E)$

$$= \frac{400}{1000} \times \frac{3}{1000} + \frac{600}{1000} \times \frac{1}{1000} = \frac{12+6}{10000} = \frac{9}{5000}$$

- (2) 求める確率は $P_E(A)$ であるから

$$P_E(A) = \frac{P(E \cap A)}{P(E)} = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{12}{10000} \div \frac{9}{5000} = \frac{2}{3}$$