極限

$\boxed{1}$

(1)　一般項 a_n が次の式で表される数列$\{a_n\}$の極限を求めよ。

①　$-\dfrac{1}{n}$　　②　$\dfrac{1}{2^n}$　　③　$\dfrac{1}{2}n(n+1)$　　④　$-n$

(2)　一般項 a_n が次の式で表される数列$\{a_n\}$の収束，発散について調べよ。

①　-3^n　　②　$(-3)^n$　　③　$\sin n\pi$　　④　$\tan\dfrac{2n-1}{4}\pi$

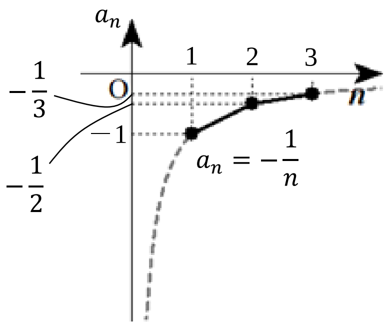
解答

(1)　①　数列 -1，$-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{3}$，……，$-\dfrac{1}{n}$，……

において，n を限りなく大きくする

と，$-\dfrac{1}{n}$ の値は限りなく 0 に近づく。

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=\mathbf{0}$

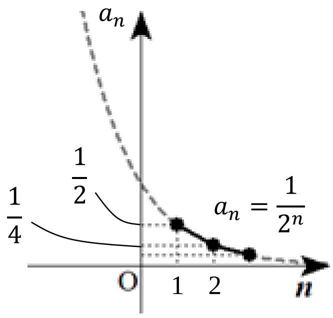


②　数列 $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{8}$，……，$\dfrac{1}{2^n}$，……

において，n を限りなく大きくする

と，$\dfrac{1}{2^n}$ の値は限りなく 0 に近づく。

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=\mathbf{0}$

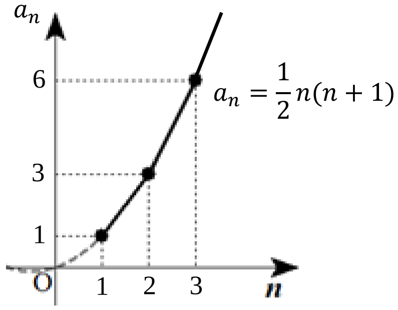


③　数列 1，3，6，……，$\dfrac{1}{2}n(n+1)$，……

において，n を限りなく大きくする

と，$\dfrac{1}{2}n(n+1)$の値は限りなく大きくなる。

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}n(n+1)=\infty$



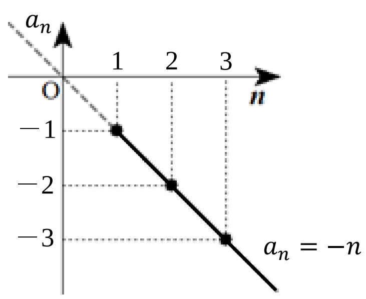
④　数列 -1，-2，-3，……，$-n$，……

において，n を限りなく大きくする

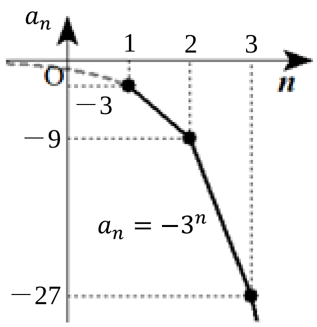
と，$-n$の値は負でその絶対値が限りなく

大きくなる。

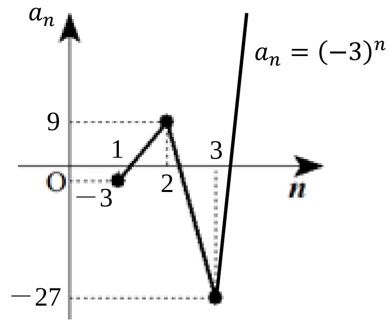
よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-n)=-\infty$



(2)　①　数列-3，-9，-27，……，-3^n，……
において，n を限りなく大きくする
と，-3^nの値は負でその絶対値が限りなく
大きくなる。
よって，**負の無限大に発散** する。



②　数列-3，9，-27，……，$(-3)^n$，……
において，n を限りなく大きくする
と，$(-3)^n$の絶対値は限りなく大きくなるが，
その符号は交互に変わり，正の無限大にも
負の無限大にも発散しない。
よって，**振動** する。



③　$\sin\pi=0$，$\sin 2\pi=0$，$\sin 3\pi=0$，……
であるから，数列$\{\sin n\pi\}$はすべての項が 0 の数列である。
よって，この数列は **収束し，極限値は 0**

④　$\tan\dfrac{\pi}{4}=1$，$\tan\dfrac{3}{4}\pi=-1$，$\tan\dfrac{5}{4}\pi=1$，……

であるから，数列$\left\{\tan\dfrac{2n-1}{4}\pi\right\}$は$-1$ と 1 が交互に現れる数列である。よって，nを限りなく大きくしても一定の値に収束せず，正の無限大にも負の無限大にも発散しない。
したがって，**振動** する。

$\boxed{2}$

(1)　次の極限を求めよ。

①　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4-9n}{4n+6}$　　②　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{6n+3}{5n^2-9}$　　③　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3}{3n+1}$

④　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n}\right)$　　⑤　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2n}-n\right)$

(2)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{n}{2}\pi}{n}$ を求めよ。

解答

(1)　①　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4-9n}{4n+6}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n}-9}{4+\frac{6}{n}}=\frac{-9}{4}=-\boldsymbol{\frac{9}{4}}$

②　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{6n+3}{5n^2-9}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6}{n}+\frac{3}{n^2}}{5-\frac{9}{n^2}}=\frac{0}{5}=\mathbf{0}$

③　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{3+\frac{1}{n}}=\infty$

④　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\infty$

⑤　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2-2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2-2n}+n\right)}{\sqrt{n^2-2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-2n)-n^2}{\sqrt{n^2-2n}+n}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{\sqrt{n^2-2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{n}}+1}=\frac{-2}{1+1}=\mathbf{-1}$

(2)　$-1\leqq\cos\frac{n}{2}\pi\leqq1$ であり，各辺を自然数nで割ると　$\displaystyle-\frac{1}{n}\leqq\frac{\cos\frac{n}{2}\pi}{n}\leqq\frac{1}{n}$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{n}{2}\pi}{n}=\mathbf{0}$

$\boxed{3}$

(1)　次の極限を求めよ。

①　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$　　②　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{3}\right)^n$　　③　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+8}{3^{n+1}-7}$　　④　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}}{2^n-3^n}$

(2)　第n項が$\dfrac{r^n-1}{r^n+1}$で表される数列の極限を調べよ。ただし，$r\neq -1$ とする。

解答

(1)　①　$\dfrac{2}{3}<1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\mathbf{0}$

②　$\dfrac{\pi}{3}>1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{3}\right)^n=\infty$

③　$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+8}{3^{n+1}-7}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+8\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}{3-7\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

④　$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}}{2^n-3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{2^n-3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}=-\infty$$

(2)　(i)　$r>1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$ であるから　$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-1}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{r}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{r}\right)^n}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

(ii)　$r=1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-1}{r^n+1}=\frac{1-1}{1+1}=0$

(iii)　$|r|<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-1}{r^n+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$

(iv)　$r<-1$ のとき，$\left|\dfrac{1}{r}\right|<1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$

よって　$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-1}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{r}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{r}\right)^n}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

以上より，$r\neq-1$ のときこの数列は収束し，その極限値は

$|r|>1$のとき　1,

$r=1$のとき　0,

$|r|<1$のとき　-1

$\boxed{4}$

(1)　次の無限級数の収束，発散について調べ，収束するときはその和を求めよ。

①　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(3n-1)(3n+2)}$　　②　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

(2)　次の無限等比級数の収束，発散について調べ，収束するときはその和を求めよ。

①　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　　②　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{n-1}$

(3)　循環小数 $2.\dot{8}$を分数になおせ。

解答

(1)　①　$\displaystyle\frac{a}{3n-1}+\frac{b}{3n+2}=\frac{a(3n+2)+b(3n-1)}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{3(a+b)n+2a-b}{(3n-1)(3n+2)}$

$\begin{cases}a+b=0\\2a-b=3\end{cases}$　を満たすのは，$a=1$，$b=-1$ であるから

$\displaystyle\frac{3}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}$ と変形できる。

無限級数の第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\frac{3}{2\cdot5}+\frac{3}{5\cdot8}+\cdots\cdots+\frac{3}{(3n-1)(3n+2)}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{1}{2}$　　したがって，この無限級数は **収束し，その和は $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$**

②　$\displaystyle\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\frac{2\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)}{(n+2)-n}=\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$

と変形できる。無限級数の第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\frac{2}{\sqrt{3}+1}+\frac{2}{2+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-2}}+\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}+\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

$$=\left(\sqrt{3}-1\right)+\left(2-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-2}\right)+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)+\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$$

$$=-1-\sqrt{2}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(-1-\sqrt{2}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)=\infty$

したがって，この無限級数は **発散** する。

(2)　①　初項は 3，公比は$r=\dfrac{1}{2}$で$|\,r\,|<1$ であるから，この無限等比級数は **収束** する。

その和は　$\displaystyle\frac{3}{1-\frac{1}{2}}=\boldsymbol{6}$

②　初項は 1，公比は$r=-\dfrac{\sqrt{10}}{3}$で$|\,r\,|\geqq1$ であるから，この無限等比級数は **発散** する。

(3)　$2.\dot{8}=2.888\cdots\cdots=2+\underline{0.8+0.08+0.008+\cdots\cdots}$

下線部は，初項 0.8，公比 0.1 の無限等比級数である。公比の絶対値が 1 より小さいから，

この無限等比級数は収束する。よって　$2.\dot{8}=2+\dfrac{0.8}{1-0.1}=2+\dfrac{8}{10-1}=\boldsymbol{\dfrac{26}{9}}$

5

(1)　無限級数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{3^n}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(2)　無限級数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$は発散することを示せ。

解答

(1)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$は初項$\dfrac{1}{3}$，公比$\dfrac{1}{3}$の無限等比級数であり，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$は初項 1，公比$-\dfrac{1}{2}$の無限等比級数である。公比の絶対値がともに 1 より小さいから，2 つの無限等比級数は収束する。

したがって，与えられた無限級数も **収束** し，その **和は**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{3^n}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\boldsymbol{\frac{7}{6}}$$

(2)　数列$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$の一般項を$a_n$とすると　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{1}=1$

よって，数列$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$が 0 に収束しないから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$は発散する。

$\boxed{6}$

(1)　次の極限値を求めよ。

①　$\displaystyle\lim_{x\to1}(-x^2+2)$　　②　$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x^2+x}$　　③　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

(2)　等式$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+8}+b}{x-1}=-1$ が成り立つように，定数a，bの値を定めよ。

(3)　次の極限を求めよ。

①　$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{1}{x}$　　②　$\displaystyle\lim_{x\to3+0}\frac{|x-1|}{x(x-3)}$

(4)　次の極限は存在するか。存在すればその極限を求めよ。

①　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{|x|}$　　②　$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{1}{(x-2)^2}$

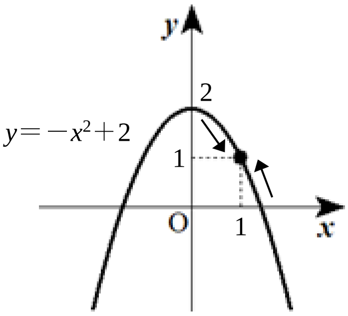
(5)　次の極限を求めよ。

①　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^2-3x)$　　②　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+5x^2+7}{x^3+3}$

③　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$　　④　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)$

解答

(1)　①　$\displaystyle\lim_{x\to1}(-x^2+2)=\mathbf{1}$



②　$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x^2+x}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)}=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x+1}{x}=\mathbf{-3}$$

③　$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{(x+3)-4}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{2+2}=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+8}+b}{x-1}=-1$　かつ　$\displaystyle\lim_{x\to1}(x-1)=0$ であるから，$\displaystyle\lim_{x\to1}(a\sqrt{x+8}+b)=0$ である。

よって　$\displaystyle\lim_{x\to1}\left(a\sqrt{x+8}+b\right)=3a+b=0$　……①

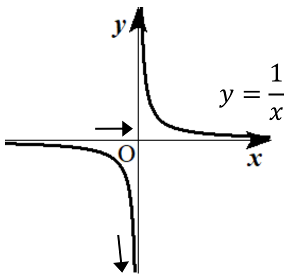
これから　b＝－3a　　これを，与えられた等式の左辺に代入すると

$$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+8}-3a}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a\left(\sqrt{x+8}-3\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\lim_{x\to1}\frac{a\{(x+8)-9\}}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\lim_{x\to1}\frac{a}{\sqrt{x+8}+3}=\frac{a}{3+3}=\frac{a}{6}$$

よって　$\dfrac{a}{6}=-1$　……②　　①，②から　$\boldsymbol{a=-6,\ b=18}$

(3)　①　$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty$



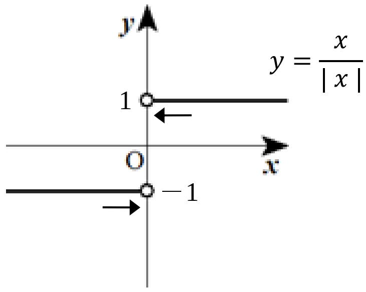
②　$x>3$ のとき，$\dfrac{|x-3|}{x(x-3)}=\dfrac{x-3}{x(x-3)}=\dfrac{1}{x}$であるから

$$\lim_{x\to3+0}\frac{|x-3|}{x(x-3)}=\lim_{x\to3+0}\frac{1}{x}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

(4)　①　$x>0$ のとき　$\dfrac{x}{|x|}=1$

$x<0$ のとき　$\dfrac{x}{|x|}=-1$

よって，$y=\dfrac{x}{|x|}$のグラフは右の図のようになる。



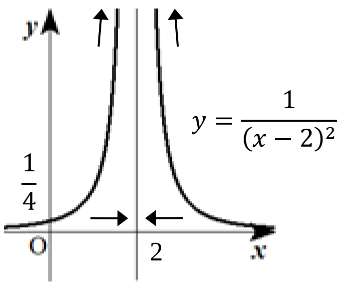
これより，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x}{|x|}=1$，$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{x}{|x|}=-1$ で，

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x}{|x|}\neq\lim_{x\to-0}\frac{x}{|x|}$であるから，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{|x|}$は **存在しない。**

②　$\displaystyle\lim_{x\to2+0}\frac{1}{(x-2)^2}=\infty$,

$\displaystyle\lim_{x\to2-0}\frac{1}{(x-2)^2}=\infty$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{1}{(x-2)^2}=\infty$



(5) ① $\lim_{x\to\infty}(x^2-3x)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)=\infty$

② $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+5x^2+7}{x^3+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{5}{x}+\frac{7}{x^3}}{1+\frac{3}{x^3}}=\frac{1+0+0}{1+0}=\mathbf{1}$

③ $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x)-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=\frac{2}{1+1}=\mathbf{1}$$

④ $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)$において，$x=-t$とおくと，$x\longrightarrow-\infty$のとき$t\longrightarrow\infty$

よって $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\sqrt{t^2-1}-t\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\sqrt{t^2-1}-t\right)\left(\sqrt{t^2-1}+t\right)}{\sqrt{t^2-1}+t}$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-1)-t^2}{\sqrt{t^2-1}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{t^2-t}+t}=\mathbf{0}$$

$\boxed{7}$

(1)　次の極限値を求めよ。

①　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$　②　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3^x+4^x}{5^x-2}$　③　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{x}$

④　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}$　⑤　$\displaystyle\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi+0}\tan x$

(2)　次の極限値を求めよ。

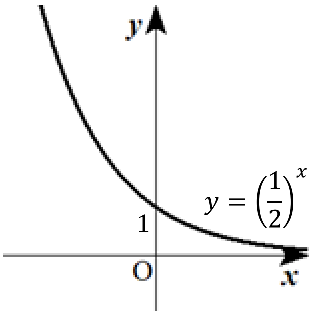
①　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}$　②　$\displaystyle\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}$

(3)　次の極限値を求めよ。

①　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}$　②　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

解答

(1)　①　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=\infty$



②　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3^x+4^x}{5^x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x}{1-2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x}=\mathbf{0}$

③　$x\longrightarrow+0$ のとき，$\dfrac{1}{x}\longrightarrow\infty$であるから　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{x}=-\infty$

④　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}=\mathbf{1}$

⑤　$\displaystyle\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi+0}\tan x=\infty$

(2)　①　$x \longrightarrow \infty$を考えるので，$x>0$ としてよい。

$-1 \leqq \cos x \leqq 1$ であり，各辺をxで割ると　$-\dfrac{1}{x} \leqq \dfrac{\cos x}{x} \leqq \dfrac{1}{x}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}=\mathbf{0}$

②　(i)　<u>$x>0$ のとき</u>

$-1 \leqq \sin\dfrac{1}{x} \leqq 1$ であり，各辺にxを掛けると　$-x \leqq x\sin\dfrac{1}{x} \leqq x$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}(-x)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}x=0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to+0}x\sin\frac{1}{x}=0$

(ii)　<u>$x<0$ のとき</u>

$-1 \leqq \sin\dfrac{1}{x} \leqq 1$ であり，各辺にxを掛けると　$x \leqq x\sin\dfrac{1}{x} \leqq -x$

$\displaystyle\lim_{x\to-0}x=0$，$\displaystyle\lim_{x\to-0}(-x)=0$ であるから，はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{x\to-0}x\sin\frac{1}{x}=0$

(i)，(ii)より，$\displaystyle\lim_{x\to+0}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to-0}x\sin\frac{1}{x}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=\mathbf{0}$

(3)　①　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to0}3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot1=\mathbf{3}$

②　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-(1-2\sin^2 x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=\lim_{x\to0}2\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2\cdot1^2=\mathbf{2}$

$\boxed{8}$

(1)　関数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & (x>0)\\ x+1 & (x\leqq 0)\end{cases}$　は，$x=0$ で連続か。

(2) 方程式$\log_2(x+1)-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=0$ は区間$(0,\ 1)$において，少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。

解答

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{|\,x\,|}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{x}{x}=1$，　$\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}(x+1)=1$ より，　$\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)$ が存在し，

$\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$が成り立つ。よって，$f(x)$は$x=0$ で **連続である。**

(2)　$f(x)=\log_2(x+1)-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ とおくと，関数$f(x)$は区間$[0,\ 1]$で連続であり

$$f(0)=\log_2 1-\left(\frac{1}{2}\right)^0=0-1=-1<0,\qquad f(1)=\log_2 2-\left(\frac{1}{2}\right)^1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$$

したがって，中間値の定理により，　$f(c)=0$，　$0<c<1$　を満たすcが少なくとも 1 つ存在するので，方程式$f(x)=0$ は区間$(0,\ 1)$において，少なくとも 1 つの実数解をもつ。