

## 式の展開と因数分解

1

(1) 次の整式を [ ] 内の文字について降べきの順に整理し, [ ] 内の文字に着目したときの次数と定数項を答えよ。

①  $2a^2+3+a^4+2a^4+3a^2+a^6$  [  $a$  ]

②  $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx$  [  $z$  ]

(2)  $A=x^2+2ax+2$ ,  $B=a^2-3ax+1$  のとき, 次の計算をせよ。

①  $3A+2B$

②  $A-\{2B+3(A-2B)\}$

### 解答

(1) ①  $2a^2+3+a^4+2a^4+3a^2+a^6=a^6+3a^4+5a^2+3$

次数は 6, 定数項は 3

②  $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=z^2+(x+y)z+x^2+y^2+xy$

次数は 2, 定数項は  $x^2+y^2+xy$

(2) ①  $3A+2B=3(x^2+2ax+2)+2(a^2-3ax+1)=3x^2+6ax+6+2a^2-6ax+2$   
 $=3x^2+2a^2+8$

②  $A-\{2B+3(A-2B)\}=A-(2B+3A-6B)=A-2B-3A+6B=-2A+4B$   
 $=-2(x^2+2ax+2)+4(a^2-3ax+1)=-2x^2-4ax-4+4a^2-12ax+4$   
 $=-2x^2-16ax+4a^2$

2

(1) 次の式を計算せよ。

①  $(-2a^2b)^3$

②  $x^2y^3 \times (-xy^2z)^2$

(2) 次の式を展開せよ。

①  $(x^2-x-1)(2x+1)$

②  $(a+b+1)(2a-3b-1)$

### 解答

(1) ①  $(-2a^2b)^3=(-2)^3a^{2 \times 3}b^3=-8a^6b^3$

②  $x^2y^3 \times (-xy^2z)^2=x^2y^3 \times (-1)^2x^2y^2z^2=1 \times x^{2+2} \times y^{3+4} \times z^2=x^4y^7z^2$

(2) ①  $(x^2-x-1)(2x+1)=(x^2-x-1) \cdot 2x+(x^2-x-1) \cdot 1=2x^3-2x^2-2x+x^2-x-1$   
 $=2x^3-x^2-3x-1$

②  $(a+b+1)(2a-3b-1)=a(2a-3b-1)+b(2a-3b-1)+1 \cdot (2a-3b-1)$   
 $=2a^2-3ab-a+2ab-3b^2-b+2a-3b-1$   
 $=2a^2-ab-3b^2+a-4b-1$

**3** 次の式を展開せよ。

- (1)  $(a-2b)^2$  (2)  $(3+2x)(3-2x)$   
 (3)  $(a-5)(a+7)$  (4)  $(5x-4y)(3x+2y)$

**解答**

- (1)  $(a-2b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot 2b + (2b)^2 = a^2 - 4ab + 4b^2$   
 (2)  $(3+2x)(3-2x) = 3^2 - (2x)^2 = 9 - 4x^2$   
 (3)  $(a-5)(a+7) = a^2 + (-5+7)a - 5 \cdot 7 = a^2 + 2a - 35$   
 (4)  $(5x-4y)(3x+2y) = (5 \cdot 3)x^2 + \{5 \cdot 2y + (-4y) \cdot 3\}x - 4y \cdot 2y = 15x^2 - 2xy - 8y^2$

**4** 次の式を展開せよ。

- (1)  $(x^2+x+1)^2$  (2)  $(4a^2+1)(2a+1)(2a-1)$

**解答**

- (1)  $x^2+x=A$  とおくと  $(x^2+x+1)^2 = (A+1)^2 = A^2 + 2A + 1 = (x^2+x)^2 + 2(x^2+x) + 1$   
 $= x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x + 1 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

**別解**  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$  において,  $a=x^2$ ,  $b=x$ ,  $c=1$  を代入すると

$$(x^2+x+1)^2 = (x^2)^2 + x^2 + 1^2 + 2 \cdot x^2 \cdot x + 2 \cdot x \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot x^2$$

$$= x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x + 2x^2 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

- (2)  $(4a^2+1)(2a+1)(2a-1) = (4a^2+1)\{(2a)^2 - 1^2\} = (4a^2+1)(4a^2-1) = (4a^2)^2 - 1^2$   
 $= 16a^4 - 1$

**5** 次の式を因数分解せよ。

- (1)  $3ax^2 - 6a^2b$  (2)  $16a^2 + 8a + 1$  (3)  $x^2 - x + \frac{1}{4}$   
 (4)  $64x^2 - 25y^2$  (5)  $a^2 + 3ab - 10b^2$  (6)  $3x^2 - 12$

**解答**

- (1)  $3ax^2 - 6a^2b = 3a \cdot x^2 - 3a \cdot 2ab = 3a(x^2 - 2ab)$   
 (2)  $16a^2 + 8a + 1 = (4a)^2 + 2 \cdot 4a \cdot 1 + 1^2 = (4a+1)^2$   
 (3)  $x^2 - x + \frac{1}{4} = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$   
 (4)  $64x^2 - 25y^2 = (8x)^2 - (5y)^2 = (8x+5y)(8x-5y)$   
 (5)  $a^2 + 3ab - 10b^2 = a^2 + (5b-2b)a + 5b \cdot (-2b) = (a+5b)(a-2b)$   
 (6)  $3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x^2 - 2^2) = 3(x+2)(x-2)$

6 次の式を因数分解せよ。

(1)  $3x^2+5x-2$

(2)  $4a^2+8a+3$

(3)  $6x^2+xy-2y^2$

(4)  $8a^2-14ab-15b^2$

**解答**

(1)  $3x^2+5x-2=(x+2)(3x-1)$

$$\begin{array}{r} 1 \quad \times \quad 2 \quad \longrightarrow \quad 6 \\ 3 \quad \times \quad -1 \quad \longrightarrow \quad -1 \\ \hline \phantom{1 \quad \times \quad 2 \quad \longrightarrow \quad 6} \phantom{3 \quad \times \quad -1 \quad \longrightarrow \quad -1} \phantom{6} \\ \phantom{1 \quad \times \quad 2 \quad \longrightarrow \quad 6} \phantom{3 \quad \times \quad -1 \quad \longrightarrow \quad -1} 5 \end{array}$$

(2)  $4a^2+8a+3=(2a+1)(2a+3)$

$$\begin{array}{r} 2 \quad \times \quad 1 \quad \longrightarrow \quad 2 \\ 2 \quad \times \quad 3 \quad \longrightarrow \quad 6 \\ \hline \phantom{2 \quad \times \quad 1 \quad \longrightarrow \quad 2} \phantom{2 \quad \times \quad 3 \quad \longrightarrow \quad 6} \phantom{2} \\ \phantom{2 \quad \times \quad 1 \quad \longrightarrow \quad 2} \phantom{2 \quad \times \quad 3 \quad \longrightarrow \quad 6} 8 \end{array}$$

(3)  $6x^2+xy-2y^2=(2x-y)(3x+2y)$

$$\begin{array}{r} 2 \quad \times \quad -y \quad \longrightarrow \quad -3y \\ 3 \quad \times \quad 2y \quad \longrightarrow \quad 4y \\ \hline \phantom{2 \quad \times \quad -y \quad \longrightarrow \quad -3y} \phantom{3 \quad \times \quad 2y \quad \longrightarrow \quad 4y} \phantom{-3y} \\ \phantom{2 \quad \times \quad -y \quad \longrightarrow \quad -3y} \phantom{3 \quad \times \quad 2y \quad \longrightarrow \quad 4y} y \end{array}$$

(4)  $8a^2-14ab-15b^2=(2a-5b)(4a+3b)$

$$\begin{array}{r} 2 \quad \times \quad -5b \quad \longrightarrow \quad -20b \\ 4 \quad \times \quad 3b \quad \longrightarrow \quad 6b \\ \hline \phantom{2 \quad \times \quad -5b \quad \longrightarrow \quad -20b} \phantom{4 \quad \times \quad 3b \quad \longrightarrow \quad 6b} \phantom{-20b} \\ \phantom{2 \quad \times \quad -5b \quad \longrightarrow \quad -20b} \phantom{4 \quad \times \quad 3b \quad \longrightarrow \quad 6b} -14b \end{array}$$

7 次の式を因数分解せよ。

(1)  $(x+y+1)(x+y+2)-6$

(2)  $4a^2-9b^2+6bc-c^2$

**解答**

(1)  $x+y=A$  とおくと

$$\begin{aligned} (x+y+1)(x+y+2)-6 &= (A+1)(A+2)-6 = A^2+3A+2-6 = A^2+3A-4 \\ &= (A+4)(A-1) \\ &= (x+y+4)(x+y-1) \end{aligned}$$

(2)  $4a^2-9b^2+6bc-c^2=4a^2-(9b^2-6bc+c^2)=4a^2-\{(3b)^2-2 \cdot 3b \cdot c+c^2\}=4a^2-(3b-c)^2$  から

$3b-c=A$  とおくと

$$\begin{aligned} 4a^2-9b^2+6bc-c^2 &= 4a^2-A^2 = (2a)^2-A^2 = (2a+A)(2a-A) \\ &= \{2a+(3b-c)\}\{2a-(3b-c)\} \\ &= (2a+3b-c)(2a-3b+c) \end{aligned}$$



**研究 1**

(1) 次の式を展開せよ。

①  $(3x-1)^3$

②  $(4a+3b)(16a^2-12ab+9b^2)$

(2) 次の式を因数分解せよ。

①  $1-a^3$

②  $1000x^3+y^3$

**解答**

(1) ①  $(3x-1)^3=(3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot 1+3\cdot 3x\cdot 1^2-1^3=27x^3-27x^2+9x-1$

②  $(4a+3b)(16a^2-12ab+9b^2)=(4a+3b)\{(4a)^2-4a\cdot 3b+(3b)^2\}=(4a)^3+(3b)^3$   
 $=64a^3+27b^3$

(2) ①  $1-a^3=1^3-a^3=(1-a)(1^2+1\cdot a+a^2)=(1-a)(1+a+a^2)$

②  $1000x^3+y^3=(10x)^3+y^3=(10x+y)\{(10x)^2-10x\cdot y+y^2\}$   
 $=(10x+y)(100x^2-10xy+y^2)$

**研究 2**

次の式を因数分解せよ。

(1)  $x^4-1$

(2)  $x^4-2x^2-8$

(3)  $x^4+4$

(4)  $x^4-3x^2+1$

**解答**

(1)  $x^2=X$  とおくと  $x^4-1=(x^2)^2-1=X^2-1=(X+1)(X-1)=(x^2+1)(x^2-1)$   
 $=(x^2+1)(x+1)(x-1)$

(2)  $x^2=X$  とおくと  $x^4-2x^2-8=(x^2)^2-2x^2-8=X^2-2X-8=(X+2)(X-4)=(x^2+2)(x^2-4)$   
 $=(x^2+2)(x+2)(x-2)$

(3)  $(x^2+2)^2=x^4+4x^2+4$  から  
 $x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-4x^2$

と変形できる。このことから

$$x^4+4=(x^2+2)^2-4x^2=\{(x^2+2)+2x\}\{(x^2+2)-2x\}$$

$$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$$

(4)  $(x^2-1)^2=x^4-2x^2+1$  から  
 $x^4-3x^2+1=x^4-2x^2+1-x^2=(x^2-1)^2-x^2$

と変形できる。このことから

$$x^4-3x^2+1=(x^2-1)^2-x^2=\{(x^2-1)+x\}\{(x^2-1)-x\}$$

$$=(x^2+x-1)(x^2-x-1)$$