

式と曲線

1

次の問いに答えよ。

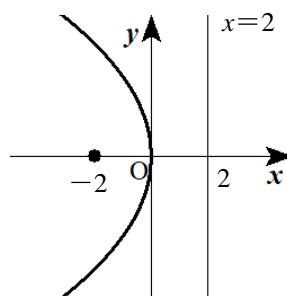
- (1) 焦点が点 $(-2, 0)$ ，準線が直線 $x=2$ である放物線の方程式を求めよ。また，その概形をかけ。
- (2) 放物線 $y^2=2x$ の焦点，準線および頂点を求め，その概形をかけ。
- (3) 焦点が点 $(0, 3)$ ，準線が直線 $y=-3$ である放物線の方程式を求めよ。また，その概形をかけ。
- (4) 放物線 $x^2=-4y$ の焦点，準線および頂点を求め，その概形をかけ。

解答

(1) $y^2=4 \cdot (-2)x$

から $y^2=-8x$

概形は，右の図のようになる。



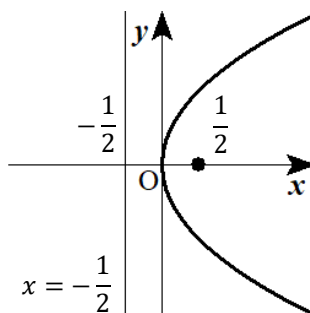
(2) $y^2=2x$ は， $y^2=4 \cdot \frac{1}{2}x$ と変形できるから

焦点は点 $(\frac{1}{2}, 0)$

準線は直線 $x=-\frac{1}{2}$

頂点は原点 $(0, 0)$

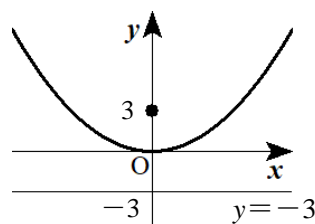
概形は，右の図のようになる。



(3) $x^2=4 \cdot 3 \cdot y$

から $x^2=12y$

概形は，右の図のようになる。



(4) $x^2=-4y$ は， $x^2=4 \cdot (-1)y$

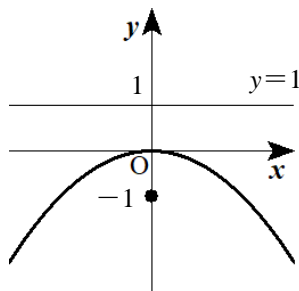
と変形できるから

焦点は点 $(0, -1)$

準線は直線 $y=1$

頂点は原点 $(0, 0)$

概形は，右の図のようになる。



2

- (1) 楕円 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ の頂点と焦点を求め、その概形をかけ。また、長軸と短軸の長さを求めよ。
- (2) 焦点が点(3, 0), (-3, 0)で、この2点からの距離の和が8である楕円の方程式を求めよ。
- (3) 楕円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ の頂点と焦点を求め、その概形をかけ。
- (4) 焦点が点(0, 1), (0, -1)で、この2点からの距離の和が4である楕円の方程式を求めよ。
- (5) 円 $x^2 + y^2 = 9$ を、 x 軸を基準として y 軸方向に $\frac{2}{3}$ 倍するとどのような曲線になるか。

解答

- (1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ は $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ と変形できるから

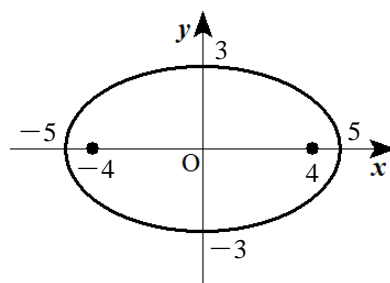
頂点は点(5, 0), (-5, 0), (0, 3), (0, -3)

焦点は点($\sqrt{5^2 - 3^2}$, 0), ($-\sqrt{5^2 - 3^2}$, 0)

すなわち、点(4, 0), (-4, 0)

概形は右の図のようになる。

長軸の長さは10, 短軸の長さは6



- (2) 焦点が x 軸上にあり、2つの焦点を結ぶ線分の中点は原点であるから、求める楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0$$

とおくことができる。

2つの焦点までの距離の和が8であるから $2a=8$ よって $a=4$

焦点は点($\sqrt{a^2 - b^2}$, 0), ($-\sqrt{a^2 - b^2}$, 0)であるから $\sqrt{a^2 - b^2} = 3$

両辺を2乗して $a^2 - b^2 = 9$ これに $a=4$ を代入すると $16 - b^2 = 9$ したがって $b^2 = 7$

以上から、求める楕円の方程式は $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

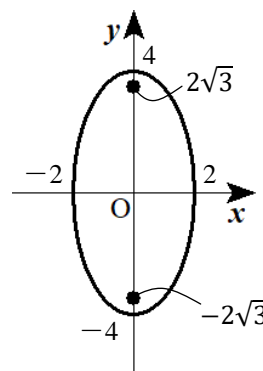
- (3) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ は $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ と変形できるから

頂点は点(2, 0), (-2, 0), (0, 4), (0, -4)

焦点は点(0, $\sqrt{4^2 - 2^2}$), (0, $-\sqrt{4^2 - 2^2}$)

すなわち、点(0, $2\sqrt{3}$), (0, $-2\sqrt{3}$)

概形は右の図のようになる。



Math-Aquarium 【練習問題＋解答】式と曲線

(4) 焦点が y 軸上にあり、2つの焦点を結ぶ線分の中点は原点であるから、求める楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b > a > 0$$

とおくことができる。

2つの焦点までの距離の和が4であるから $2b=4$ よって $b=2$

焦点は点 $(0, \sqrt{b^2 - a^2})$, $(0, -\sqrt{b^2 - a^2})$ であるから $\sqrt{b^2 - a^2} = 1$

両辺を2乗して $b^2 - a^2 = 1$ これに $b=2$ を代入すると $4 - a^2 = 1$ したがって $a^2 = 3$

以上から、求める楕円の方程式は $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$

(5) 円周上の点を $Q(s, t)$, 点 Q が移される点を $P(x, y)$ とおくと

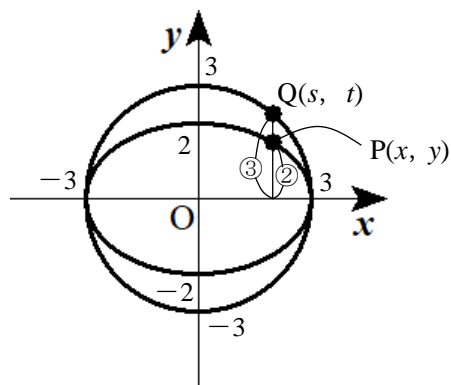
$$x = s, \quad y = \frac{2}{3}t$$

よって $s = x, \quad t = \frac{3}{2}y$

$s^2 + t^2 = 9$ であるから $x^2 + \left(\frac{3}{2}y\right)^2 = 9$

整理すると $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

したがって、求める曲線は 楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$



3

- (1) 双曲線 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ の頂点と焦点, 漸近線を求め, その概形をかけ。
- (2) 2点(3, 0), (-3, 0)を焦点とし, 焦点からの距離の差が4である双曲線の方程式を求めよ。
- (3) 双曲線 $x^2 - 4y^2 = -16$ の頂点と焦点, 漸近線を求め, その概形をかけ。
- (4) 2点(0, 4), (0, -4)を焦点とし, 漸近線が2直線 $y = \sqrt{3}x$, $y = -\sqrt{3}x$ である双曲線の方程式を求めよ。

解答

- (1) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ は $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ と変形できるから

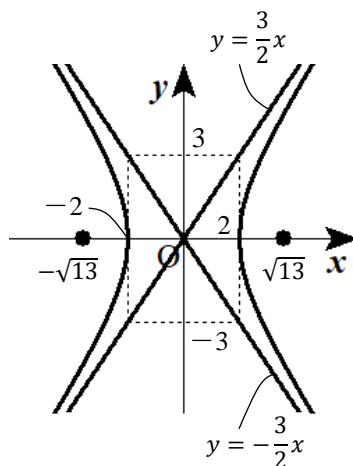
頂点は点(2, 0), (-2, 0)

焦点は点($\sqrt{2^2 + 3^2}$, 0), ($-\sqrt{2^2 + 3^2}$, 0)

すなわち, 点($\sqrt{13}$, 0), ($-\sqrt{13}$, 0)

漸近線は2直線 $y = \frac{3}{2}x$, $y = -\frac{3}{2}x$

概形は右の図のようになる。



- (2) 焦点が x 軸上にあり, 2つの焦点を結ぶ線分の中点は原点であるから, 求める双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, b > 0$$

とおくことができる。

2つの焦点までの距離の差が4であるから $2a=4$ よって $a=2$

焦点は点($\sqrt{a^2 + b^2}$, 0), ($-\sqrt{a^2 + b^2}$, 0)であるから $\sqrt{a^2 + b^2} = 3$

両辺を2乗して $a^2 + b^2 = 9$ これに $a=2$ を代入すると $4 + b^2 = 9$ したがって $b^2 = 5$

以上から, 求める双曲線の方程式は $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

(3) $x^2 - 4y^2 = -16$ は $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{2^2} = -1$ と変形できるから

頂点は点(0, 2), (0, -2)

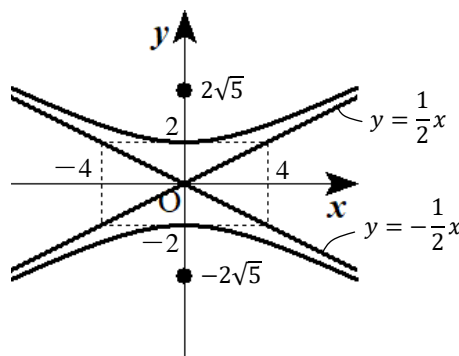
焦点は点(0, $\sqrt{4^2 + 2^2}$), (0, $-\sqrt{4^2 + 2^2}$)

すなわち, 点(0, $2\sqrt{5}$), (0, $-2\sqrt{5}$)

漸近線は 2 直線 $y = \frac{2}{4}x$, $y = -\frac{2}{4}x$

すなわち, 2直線 $y = \frac{1}{2}x$, $y = -\frac{1}{2}x$

概形は右の図のようになる。



(4) 焦点が y 軸上にあり, 2つの焦点を結ぶ線分の midpoint は原点であるから, 求める双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad a > 0, \quad b > 0$$

とおくことができる。

2つの焦点が(0, 4), (0, -4)であるから $\sqrt{a^2 + b^2} = 4$ ……①

漸近線が 2 直線 $y = \sqrt{3}x$, $y = -\sqrt{3}x$ であるから $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$ ……②

②から $b = \sqrt{3}a$ であり, これを①に代入すると $\sqrt{a^2 + 3a^2} = 4$

整理して両辺を 2 乗すると $4a^2 = 16$ $a > 0$ より $a = 2$ ②から $b = 2\sqrt{3}$

したがって, 求める双曲線の方程式は $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = -1$

4

次の問いに答えよ。

- (1) 放物線 $y^2 = 6x$ を、 x 軸方向に 2、 y 軸方向に 3 だけ平行移動した放物線の方程式と焦点を求めよ。
 (2) 次の方程式はどのような図形を表すか。

① $4x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$

② $4x^2 - y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$

解答

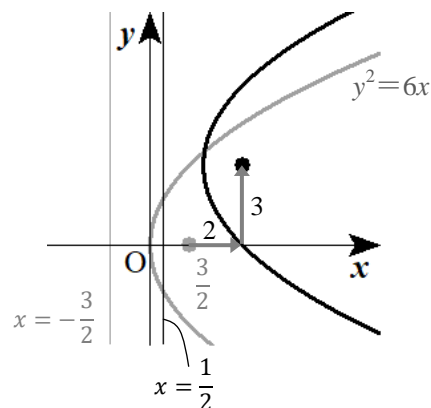
- (1) 平行移動後の放物線の方程式は $(y - 3)^2 = 6(x - 2)$

もとの放物線の焦点は

点 $(\frac{3}{2}, 0)$

であるから、移動後の放物線の焦点は

点 $(\frac{7}{2}, 3)$



- (2) ① 方程式を変形すると

$$4(x^2 - 2x + 1) - 4 + (y^2 - 4y + 4) - 4 + 4 = 0$$

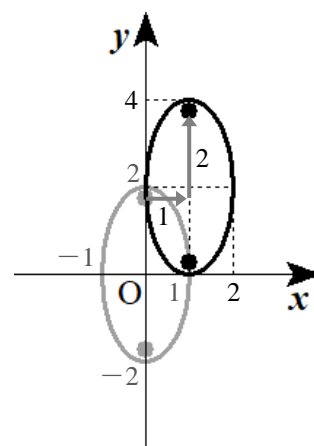
$$4(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

$$(x - 1)^2 + \frac{(y - 2)^2}{4} = 1$$

したがって、与えられた方程式は

楕円 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ を x 軸方向に 1、 y 軸方向に 2

だけ平行移動した楕円を表す。



- ② 方程式を変形すると

$$4(x^2 - 2x + 1) - 4 - (y^2 + 4y + 4) + 4 + 4 = 0$$

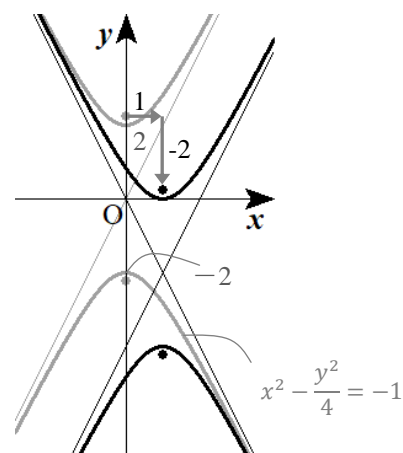
$$4(x - 1)^2 - (y + 2)^2 = -4$$

$$(x - 1)^2 - \frac{(y + 2)^2}{4} = -1$$

したがって、与えられた方程式は

双曲線 $x^2 - \frac{y^2}{4} = -1$ を x 軸方向に 1、 y 軸方向に -2

だけ平行移動した双曲線を表す。



5

- (1) k を定数とする。楕円 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1$ と直線 $y = -x + k$ の共有点の個数を調べよ。
 (2) 点 $(0, -1)$ から双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ に引いた接線の方程式を求めよ。

解答

(1) $y = -x + k$ を $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1$ に代入すると

$$\frac{x^2}{3} + \frac{(-x+k)^2}{6} = 1 \quad 2x^2 + (x^2 - 2kx + k^2) = 6$$

$$3x^2 - 2kx + k^2 - 6 = 0$$

この2次方程式の判別式を D とすると

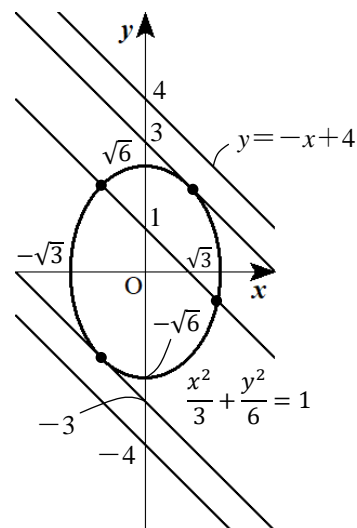
$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - 3(k^2 - 6) = -2k^2 + 18 = -2(k+3)(k-3)$$

よって、求める共有点の個数は

$$D > 0 \quad \text{すなわち} \quad -3 < k < 3 \text{ のとき} \quad \mathbf{2 \text{ 個}}$$

$$D = 0 \quad \text{すなわち} \quad k = \pm 3 \text{ のとき} \quad \mathbf{1 \text{ 個}}$$

$$D < 0 \quad \text{すなわち} \quad k < -3, 3 < k \text{ のとき} \quad \mathbf{0 \text{ 個}}$$



(2) 直線 $x=0$ は接線でないから、求める接線の方程式は $y=mx-1$ とおける。これを双曲線の方程式に代入すると

$$x^2 - (mx-1)^2 = 1 \quad x^2 - (m^2x^2 - 2mx + 1) = 1$$

$$(1-m^2)x^2 + 2mx - 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

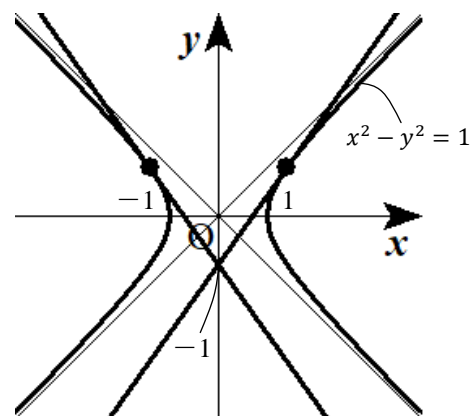
$m = \pm 1$ のとき、双曲線の漸近線と平行になるため接線にならない。

2次方程式①の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = m^2 - (1-m^2) \cdot (-2) = m^2 + 2 - 2m^2 = -m^2 + 2$$

よって、 $D=0$ となるのは $m = \pm\sqrt{2}$ のときであるから、

求める接線の方程式は $y = \sqrt{2}x - 1, y = -\sqrt{2}x - 1$



6

次の問いに答えよ。

- (1) $x=2t+1, y=2t^2-1$ のように媒介変数表示された曲線は、 t の値が変化するときどのような図形を表すか。
- (2) θ を媒介変数として、次の曲線の媒介変数表示を求めよ。
- ① $x^2 + y^2 = 4$ ② $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ③ $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$
- (3) $x=3\cos\theta - 2, y=2\sin\theta + 1$ のように媒介変数表示された曲線は、どのような図形を表すか。

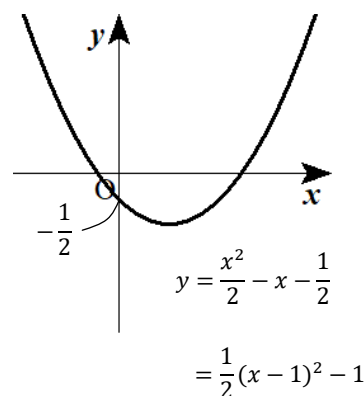
解答

- (1) $x = 2t + 1$ より、 $t = \frac{x-1}{2}$ であるから、これを $y = 2t^2 - 1$ に

代入すると

$$y = 2 \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - 1 = 2 \cdot \frac{x^2 - 2x + 1}{4} - 1 = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}$$

よって、与えられた曲線は、**放物線** $y = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}$ を表す。



- (2) ① 与えられた曲線の方程式は、 $x^2 + y^2 = 2^2$ と変形できるから

$$x = 2\cos\theta, y = 2\sin\theta$$

- ② 与えられた曲線の方程式は、 $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ と変形できるから

$$x = 5\cos\theta, y = 3\sin\theta$$

- ③ 与えられた曲線の方程式は、 $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ と変形できるから

$$x = \frac{2}{\cos\theta}, y = 3\tan\theta$$

(3) 与えられた曲線は,

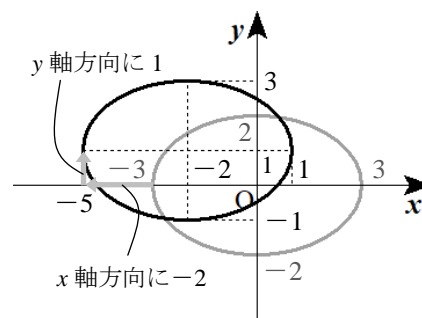
$$x=3\cos\theta, y=2\sin\theta \quad \cdots\cdots\textcircled{1}$$

のように媒介変数表示された曲線を

x 軸方向に -2 , y 軸方向に 1
だけ平行移動した曲線である。

①は, 楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ を表すから, 与えられた曲線は

楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ を x 軸方向に -2 , y 軸方向に 1 だけ平行移動
したものである。



別解 $x = 3\cos\theta - 2, y = 2\sin\theta + 1$ から, $\cos\theta = \frac{x+2}{3}, \sin\theta = \frac{y-1}{2}$

これらを $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ に代入すると $\left(\frac{x+2}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 = 1$

よって, 与えられた曲線の方程式は $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

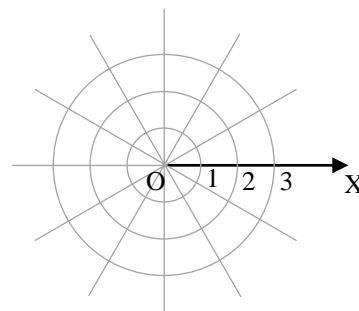
この方程式の表す図形は, 楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ を x 軸方向に -2 , y 軸方向に 1 だけ平行移動
したものである

7

次の問いに答えよ。

- (1) 極座標で表された次の点を、
右の図に図示せよ。

① $(1, \frac{\pi}{3})$ ② $(2, \pi)$ ③ $(3, -\frac{\pi}{6})$



- (2) 次の極座標で表される点の直交座標を求めよ。

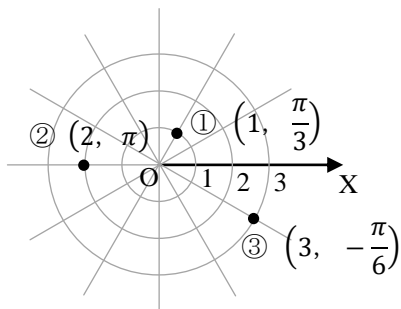
① $(2, \frac{\pi}{4})$ ② $(3, -\frac{5}{6}\pi)$

- (3) 次の直交座標で表される点の極座標 (r, θ) を求めよ。ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

① $(-1, 1)$ ② $(\sqrt{3}, 3)$ ③ $(0, -2)$

解答

(1)



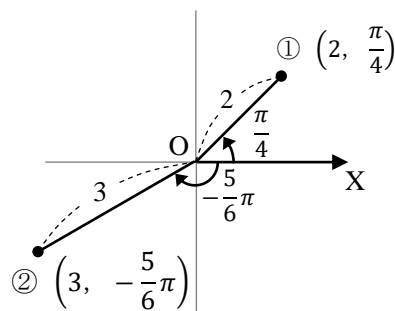
(2) ① $x = 2 \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}, y = 2 \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

であるから、直交座標は $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

② $x = 3 \cdot \cos(-\frac{5}{6}\pi) = -\frac{3\sqrt{3}}{2},$

$y = 3 \cdot \sin(-\frac{5}{6}\pi) = -\frac{3}{2}$

であるから、直交座標は $(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$



(3) ① $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ で, $0 \leq \theta < 2\pi$ であるから $\theta = \frac{3}{4}\pi$

よって, 極座標は $(\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi)$

② $r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}$,

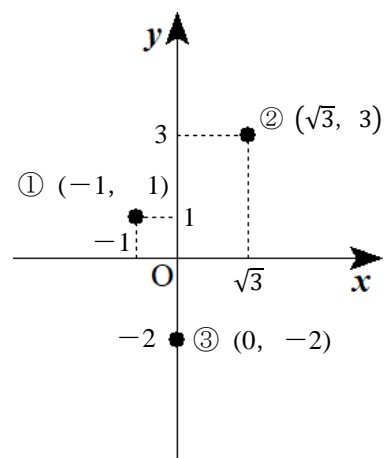
$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}, \quad \sin \theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

で, $0 \leq \theta < 2\pi$ であるから $\theta = \frac{\pi}{3}$

よって, 極座標は $(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3})$

③ $r = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$, $\cos \theta = \frac{0}{2} = 0$, $\sin \theta = \frac{-2}{2} = -1$ で,

$0 \leq \theta < 2\pi$ であるから $\theta = \frac{3}{2}\pi$ よって, 極座標は $(2, \frac{3}{2}\pi)$



8 極方程式

次の問いに答えよ。

(1) 次の極方程式を求めよ。

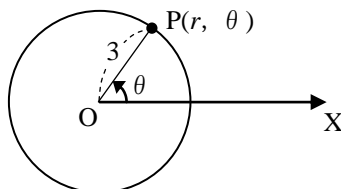
- ① 中心が極 O ，半径が 3 の円
- ② 中心の極座標が $(2, 0)$ ，半径が 2 の円
- ③ 極 O を通り，始線から測った角が $\frac{2}{3}\pi$ である直線
- ④ 極座標が $(1, \frac{\pi}{3})$ である点 A を通り，線分 OA に垂直な直線

(2) 直角座標の方程式 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ を，極方程式で表せ。

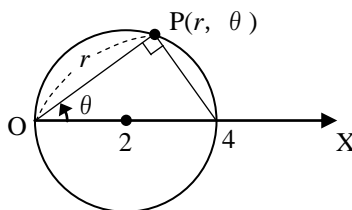
(3) 極方程式 $r = 4\sin \theta$ を，直角座標の方程式で表せ。

解答

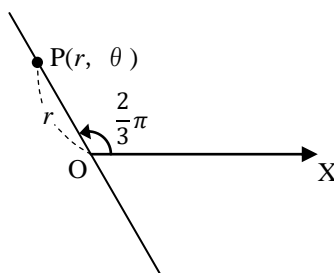
(1) ① $r = 3$



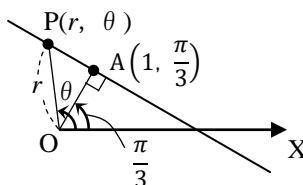
② $r = 4\cos \theta$



③ $\theta = \frac{2}{3}\pi$



④ $r \cos(\theta - \frac{\pi}{3}) = 1$



Math-Aquarium【練習問題＋解答】式と曲線

(2) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を代入すると

$$(r\cos\theta - 2)^2 + (r\sin\theta)^2 = 4 \quad r^2\cos^2\theta - 4r\cos\theta + 4 + r^2\sin^2\theta = 4 \quad r(r - 4\cos\theta) = 0$$

よって, $r = 0$ または $r = 4\cos\theta$ $r = 4\cos\theta$ は $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき $r = 0$ となるから, $r = 0$ の場合

を含む。したがって, 求める極方程式は $r = 4\cos\theta$

(3) 与えられた極方程式 $r = 4\sin\theta$ の両辺に r を掛けると $r^2 = 4r\sin\theta$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad r\sin\theta = y \text{ を代入すると } x^2 + y^2 = 4y$$

$$\text{変形すると } x^2 + (y^2 - 4y + 4) - 4 = 0 \text{ より } x^2 + (y - 2)^2 = 4$$

よって, 求める直交座標の方程式は, 円 $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ である。