

式と証明

1

(1) 次の式を展開せよ。

① $(x+1)(x^2-x+1)$

② $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$

③ $(x+3)^3$

④ $(3a-2b)^3$

(2) 次の式を因数分解せよ。

① x^3+27

② $8a^3-125$

③ x^6+1

解答

(1) ① $(x+1)(x^2-x+1)=(x+1)(x^2-x \cdot 1+1^2)=x^3+1^3=x^3+1$

② $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)=(2a)^3-b^3=8a^3-b^3$

③ $(x+3)^3=x^3+3 \cdot x^2 \cdot 3+3 \cdot x \cdot 3^2+3^3=x^3+9x^2+27x+27$

④ $(3a-2b)^3=(3a)^3-3 \cdot (3a)^2 \cdot 2b+3 \cdot 3a \cdot (2b)^2-(2b)^3=27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3$

(2) ① $x^3+27=x^3+3^3=(x+3)(x^2-x \cdot 3+3^2)=(x+3)(x^2-3x+9)$

② $8a^3-125=(2a)^3-5^3=(2a-5)\{(2a)^2+2a \cdot 5+5^2\}=(2a-5)(4a^2+10a+25)$

③ $x^6+1=(x^2)^3+1^3=(x^2+1)\{(x^2)^2-x^2 \cdot 1+1^2\}=(x^2+1)(x^4-x^2+1)$

2

(1) ① $(a+b)^5$ を、パスカルの三角形を利用して展開せよ。

② $(a+b)^5$ を、二項定理を利用して展開せよ。

(2) $(x-3y)^6$ における x^2y^4 の係数を求めよ。

(3) $(a+b+c)^7$ の展開式における a^4b^3 の係数を求めよ。

解答

(1) ① 右の三角形より

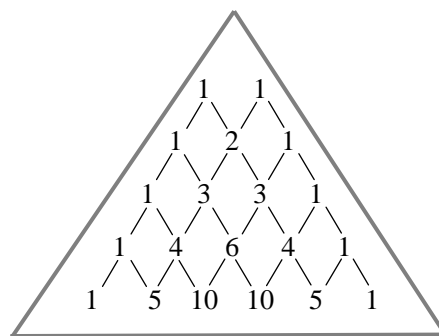
$$(a+b)^5=1a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+1b^5$$

$$=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

② $(a+b)^5$

$$={}_5C_0a^5b^0+{}_5C_1a^4b^1+{}_5C_2a^3b^2+{}_5C_3a^2b^3+{}_5C_4a^1b^4+{}_5C_5a^0b^5$$

$$=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$



(2) $(x-3y)^6$ の展開式の一般項は

$${}_6C_r x^{6-r} (-3y)^r = {}_6C_r (-3)^r x^{6-r} y^r$$

$x^{6-r}y^r$ が x^2y^4 となるのは $r=4$ よって、求める係数は ${}_6C_4 \cdot (-3)^4 = 15 \cdot 81 = 1215$

(3) $a^4b^3 = a^4b^3c^0$ より、求める係数は $\frac{7!}{4!3!0!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 35$

3

- (1) 整式 $A=x^3+2x^2+3x+4$ を整式 $B=x^2+3$ で割った商と余りを求めよ。
 (2) 整式 $A=x^3+2x^2+3x+4$ を整式 B で割ると、商が $x+1$ 、余りが 2 であった。整式 B を求めよ。

解答

$$(1) \begin{array}{r} x+2 \\ x^2+3 \overline{) x^3+2x^2+3x+4} \\ \underline{x^3 \quad +3x} \\ 2x^2 \quad +4 \\ \underline{2x^2 \quad +6} \\ -2 \end{array}$$

よって、商は $x+2$ 、余りは -2

$$(2) x^3+2x^2+3x+4=B(x+1)+2$$

これから

$$\begin{aligned} B(x+1) &= x^3+2x^2+3x+4-2 \\ &= x^3+2x^2+3x+2 \end{aligned}$$

よって $B=x-1$

$$\begin{array}{r} x^2+x+2 \\ x+1 \overline{) x^3+2x^2+3x+2} \\ \underline{x^3+x^2} \\ x^2+3x+2 \\ \underline{x^2+x} \\ 2x+2 \\ \underline{2x+2} \\ 0 \end{array}$$

4

- (1) 次の分数式を既約分数式にせよ。

① $\frac{9xy^2}{12y^3}$

② $\frac{x^2+x}{x^2-1}$

- (2) 次の計算をせよ。

① $\frac{x^2-9}{2y} \times \frac{y^2}{2x^2-9x+9}$

② $\frac{x^2+5x+6}{x+1} \div \frac{2x^2-6x-20}{3x+3}$

- (3) 次の計算をせよ。

① $\frac{x^2-7}{x+7} + \frac{6x}{x+7}$

② $\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1}$

- (4) 次の式を簡単にせよ。

① $\frac{3x+6}{1+\frac{2}{x}}$

② $1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}}$

解答

(1) ① $\frac{9xy^2}{12y^3} = \frac{3x \times 3y^2}{4y \times 3y^2} = \frac{3x}{4y}$

② $\frac{x^2+x}{x^2-1} = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x-1}$

(2) ① $\frac{x^2-9}{2y} \times \frac{y^2}{2x^2-9x+9} = \frac{(x-3)(x+3) \times y^2}{2y \times (x-3)(2x-3)} = \frac{y(x+3)}{2(2x-3)}$

② $\frac{x^2+5x+6}{x+1} \div \frac{2x^2-6x-20}{3x+3} = \frac{(x+2)(x+3)}{x+1} \times \frac{3(x+1)}{2(x+2)(x-5)} = \frac{3(x+3)}{2(x-5)}$

(3) ① $\frac{x^2-7}{x+7} + \frac{6x}{x+7} = \frac{x^2+6x-7}{x+7} = \frac{(x+7)(x-1)}{x+7} = x-1$

② $\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x^2+x+1-3}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x+2}{x^2+x+1}$

(4) ① $\frac{3x+6}{1+\frac{2}{x}} = (3x+6) \div \left(1+\frac{2}{x}\right) = 3(x+2) \div \frac{x+2}{x} = 3(x+2) \times \frac{x}{x+2} = 3x$

② $1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} = 1 - \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\left(1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}\right) \times \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = 1 - \frac{1 - \frac{1}{x}}{\left(1 - \frac{1}{x}\right) - 1} = 1 - \frac{1 - \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}} = 1 - \{-(-x-1)\} = x$

別解 $1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x-1}}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{x}{x-1}} = 1 - \frac{1}{\frac{(x-1)-x}{x-1}} = 1 - \frac{1}{\frac{-1}{x-1}} = 1 - \{-(-x-1)\} = x$

5

次の等式が x についての恒等式となるように、定数 a, b, c の値を定めよ。

(1) $(a+1)x^2 + bx + c = cx^2 + ax + 2$

(2) $ax^2 + b(x+1)(x-1) + cx = x^2 + 2x + 3$

(3) $\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$

解答

(1) 両辺の同じ次数の項の係数を比較して $a+1=c, b=a, c=2$

よって $a=1, b=1, c=2$

(2) 左辺を展開して整理すると $ax^2+b(x+1)(x-1)+cx=ax^2+b(x^2-1)+cx=(a+b)x^2+cx-b$
 両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$\begin{cases} a+b=1 \\ c=2 \\ -b=3 \end{cases} \quad \text{これを解いて } \mathbf{a=4, b=-3, c=2}$$

別解 与えられた等式が恒等式なら x にどんな値を代入しても成り立つから、 a, b, c が求めやすい x の値を代入してみる。

$x=0$ を代入すると $b \cdot (-1)=3$ よって $b=-3$

$x=1$ を代入すると $a+c=1+2+3$ よって $a+c=6$ ……①

$x=-1$ を代入すると $a-c=1-2+3$ よって $a-c=2$ ……②

①, ②から $a=4, c=2$ したがって $a=4, b=-3, c=2$

このとき、等式が恒等式になることを確かめる。

$$(\text{左辺})=4x^2-3(x+1)(x-1)+2x=4x^2-3x^2+3+2x=x^2+2x+3=(\text{右辺})$$

したがって、与えられた等式は恒等式である。

(3) 両辺に $x^2(x-1)$ を掛けて得られる等式 $1=ax^2+bx(x-1)+c(x-1)$

も恒等式である。右辺を展開して整理すると

$$ax^2+bx(x-1)+c(x-1)=ax^2+b(x^2-x)+cx-c=(a+b)x^2+(-b+c)x-c$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$\begin{cases} 0=a+b \\ 0=-b+c \\ 1=-c \end{cases} \quad \text{これを解いて } \mathbf{a=1, b=-1, c=-1}$$

別解 $1=ax^2+bx(x-1)+c(x-1)$ の両辺は 2 次以下の整式であるので、3 個の x の値、例えば $x=0, x=1, x=-1$ を代入して a, b, c の値を求めてもよい。

6

(1) 等式 $(x+y)^3-3xy(x+y)=x^3+y^3$ を証明せよ。

(2) ① $a+b+c=0$ のとき、等式 $a^2-b^2-c^2-2bc=0$ が成り立つことを証明せよ。

② $\frac{a+b}{3} = \frac{b+c}{4} = \frac{c+a}{5} \neq 0$ のとき、 $\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$ の値を求めよ。

解答

(1) (左辺) $= (x+y)^3 - 3xy(x+y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 3x^2y - 3xy^2 = x^3 + y^3 = (\text{右辺})$

(2) ① $a+b+c=0$ より、 $c=-a-b$ であるから

$$(\text{左辺})=a^2-b^2-(-a-b)^2-2b(-a-b)=a^2-b^2-(a^2+2ab+b^2)+2ab+2b^2=0=(\text{右辺})$$

別解 $a^2-b^2-c^2-2bc$ を因数分解すると

$$\begin{aligned} a^2-b^2-c^2-2bc &= a^2-(b^2+2bc+c^2)=a^2-(b+c)^2=\{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\} \\ &= (a+b+c)(a-b-c) \end{aligned}$$

よって、 $a+b+c=0$ のとき $a^2-b^2-c^2-2bc=0$

$$\textcircled{2} \quad \frac{a+b}{3} = \frac{b+c}{4} = \frac{c+a}{5} = k \text{ とおくと } a+b=3k \quad \cdots\cdots\textcircled{1}, \quad b+c=4k \quad \cdots\cdots\textcircled{2}, \quad c+a=5k \quad \cdots\cdots\textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} \text{ から } 2a+2b+2c=12k$$

$$\text{よって } a+b+c=6k \quad \cdots\cdots\textcircled{4}$$

$$\textcircled{4} - \textcircled{2}, \quad \textcircled{4} - \textcircled{3}, \quad \textcircled{4} - \textcircled{1} \text{ から}$$

$$a=2k, \quad b=k, \quad c=3k$$

これらを, $\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$ に代入すると

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} = \frac{2k \cdot k + k \cdot 3k + 3k \cdot 2k}{(2k)^2 + k^2 + (3k)^2} = \frac{11k^2}{14k^2} \quad k \neq 0 \text{ であるから, 求める値は } \frac{11}{14}$$

①-② から $a-c=-k$ これと③ から $a=2k, c=3k$ ① から $b=k$ としてもよい。
解答の, 辺々を加えて先に $a+b+c$ を求めてから a, b, c を求める方法も覚えておきたい。

7

- (1) $a < b, x < y$ のとき, 不等式 $ax+by > bx+ay$ が成り立つことを証明せよ。
 (2) ① 不等式 $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$ を証明せよ。また, 等号が成り立つのはどのようなときか。
 ② 不等式 $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ を証明せよ。また, 等号が成り立つのはどのようなときか。

証明

$$(1) \quad ax+by-bx-ay = a(x-y) - b(x-y) = (a-b)(x-y)$$

$a < b, x < y$ から $a-b < 0, x-y < 0$ よって $(a-b)(x-y) > 0$ したがって $ax+by > bx+ay$

$$(2) \quad \textcircled{1} \quad (a^2+b^2)(x^2+y^2) - (ax+by)^2 = a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 - a^2x^2 - 2abxy - b^2y^2 \\ = a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 = (ay-bx)^2 \geq 0$$

よって $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$ 等号が成り立つのは, $ay=bx$ のときである。

$$\textcircled{2} \quad a^2+b^2+c^2 - (ab+bc+ca) = \frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) \\ = \frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2) + (b^2-2bc+c^2) + (c^2-2ca+a^2)\} \\ = \frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$$

$(a-b)^2 \geq 0, (b-c)^2 \geq 0, (c-a)^2 \geq 0$ であるから $a^2+b^2+c^2 - (ab+bc+ca) \geq 0$

よって $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

等号が成り立つのは, $a-b=0$ かつ $b-c=0$ かつ $c-a=0$ すなわち, $a=b=c$ のときである。

8

- (1) $a > 0, b > 0$ のとき, 不等式 $\frac{3b}{2a} + \frac{6a}{b} \geq 6$ が成り立つことを証明せよ。また, 等号が成り立つのはどのようなときか。

- (2) $a > 1$ のとき, $a + \frac{1}{a-1}$ の最小値を求めよ。また, そのときの a の値を求めよ。

解答

(1) $a > 0$, $b > 0$ より, $\frac{3b}{2a} > 0$, $\frac{6a}{b} > 0$ であるから, 相加平均と相乗平均の大小関係により

$$\frac{3b}{2a} + \frac{6a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{3b}{2a} \cdot \frac{6a}{b}} = 2 \cdot 3 = 6 \quad \text{よって} \quad \frac{3b}{2a} + \frac{6a}{b} \geq 6$$

等号が成り立つのは $\frac{3b}{2a} = \frac{6a}{b}$ すなわち, $b^2 = 4a^2$ のときであるが, $a > 0$, $b > 0$ より, $b = 2a$ のときである。

(2) $a + \frac{1}{a-1} = a-1 + \frac{1}{a-1} + 1$

$a > 1$ より, $a-1 > 0$, $\frac{1}{a-1} > 0$ であるから,

相加平均と相乗平均の大小関係により

$$a-1 + \frac{1}{a-1} \geq 2\sqrt{(a-1) \cdot \frac{1}{a-1}} = 2 \cdot 1 = 2 \quad \text{よって} \quad a + \frac{1}{a-1} = a-1 + \frac{1}{a-1} + 1 \geq 2 + 1 = 3$$

等号が成り立つのは $a-1 = \frac{1}{a-1}$ すなわち, $(a-1)^2 = 1$ $a^2 - 2a = 0$ のときであるが,

$a > 1$ より, $a = 2$ のときである。したがって, $a = 2$ のとき, $a + \frac{1}{a-1}$ の最小値は 3

相加平均と相乗平均の大小関係を利用することを考慮して, $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ の中の, 積 xy で約分して文字が消去できるように, 与えられた式を調整する。

9

(1) $x \geq 0$, $y \geq 0$ のとき, 不等式 $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)}$ が成り立つことを証明せよ。また, 等号が成り立つのはどのようなときか。

(2) 不等式 $|x| + |y| \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ を証明せよ。また, 等号が成り立つのはどのようなときか。

証明

(1) (右辺)² - (左辺)² = $\{\sqrt{2(x+y)}\}^2 - (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = 2(x+y) - (x + 2\sqrt{xy} + y) = x - 2\sqrt{xy} + y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$

よって $\{\sqrt{2(x+y)}\}^2 \geq (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$ すなわち $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \leq \{\sqrt{2(x+y)}\}^2$

$\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 0$, $\sqrt{2(x+y)} \geq 0$ であるから $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)}$

等号が成り立つのは $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ すなわち $x = y$ のときである。

(2) (左辺)² - (右辺)² = $(|x| + |y|)^2 - (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = (|x|^2 + 2|x||y| + |y|^2) - (x^2 + y^2)$

$$= (x^2 + 2|xy| + y^2) - x^2 - y^2 = 2|xy| \geq 0$$

よって $(|x| + |y|)^2 \geq (x^2 + y^2)$ $|x| + |y| \geq 0$, $\sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ であるから $|x| + |y| \geq \sqrt{x^2 + y^2}$

等号が成り立つのは $xy = 0$ すなわち, $x = 0$ または $y = 0$ のときである。