指数関数・対数関数

1

次の計算をせよ。ただし，(2)では　$x>0$，(3)では　$x>0$，$y>0$ とする。

(1)　$9^2\times\frac{1}{27}\div 3^3$　　(2)　$\frac{1}{x^2}\div\sqrt{\frac{1}{x^3}}$

(3)　$\sqrt[4]{x^3y}\times\sqrt{\frac{y}{x}}\div\sqrt[4]{\frac{y^3}{x}}$　　(4)　$\sqrt[3]{-8}\div 4^{0.25}$

解答

(1)　$9^2\times\frac{1}{27}\div 3^3=3^4\times 3^{-3}\times 3^{-3}=3^{-2}=\boldsymbol{\frac{1}{9}}$

(2)　$\frac{1}{x^2}\div\sqrt{\frac{1}{x^3}}=x^{-2}\div x^{-\frac{3}{2}}=x^{-2}\times x^{\frac{3}{2}}=x^{-\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

(3)　$\sqrt[4]{x^3y}\times\sqrt{\frac{y}{x}}\div\sqrt[4]{\frac{y^3}{x}}=(x^3y)^{\frac{1}{4}}\times(yx^{-1})^{\frac{1}{2}}\div(y^3x^{-1})^{\frac{1}{4}}=x^{\frac{3}{4}}\cdot y^{\frac{1}{4}}\times y^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\div y^{\frac{3}{4}}\cdot x^{-\frac{1}{4}}$

$$=x^{\frac{3}{4}}\cdot y^{\frac{1}{4}}\times y^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\times y^{-\frac{3}{4}}\cdot x^{\frac{1}{4}}=x^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\cdot y^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}=x^{\frac{1}{2}}y^0=\boldsymbol{\sqrt{x}}$$

(4)　$\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$，　$4^{0.25}=(2^2)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

　よって　$\sqrt[3]{-8}\div 4^{0.25}=(-2)\div\sqrt{2}=\boldsymbol{-\sqrt{2}}$

2

(1)　$x>0$，$x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=-2$ のとき，$x+x^{-1}$ の値を求めよ。

(2)　$x>0$，$x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}=3$ のとき，$x+x^{-1}$ の値を求めよ。

(3)　$3^x-3^{-x}=2$ のとき，次の値を求めよ。

　①　3^x+3^{-x}　　②　3^x

解答

(1)　$\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}\right)^2=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2-2\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}+\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2=x-2+x^{-1}$

　$x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=-2$ から　$4=x-2+x^{-1}$　　よって　$x+x^{-1}=\boldsymbol{6}$

(2)　$\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)^3=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3+3\cdot\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2\cdot x^{-\frac{1}{3}}+3\cdot x^{\frac{1}{3}}\cdot\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^2+\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^3=x+3x^{\frac{1}{3}}+3x^{-\frac{1}{3}}+x^{-1}$

$=x+x^{-1}+3\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)$

$x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}=3$ から　$3^3=x+x^{-1}+3\cdot3$　　よって　$x+x^{-1}=\mathbf{18}$

(3)　①　$(3^x-3^{-x})^2=(3^x)^2-2\cdot3^x\cdot(3^{-x})+(3^{-x})^2=3^{2x}+3^{-2x}-2$

ここで，$3^x-3^{-x}=2$ から　$3^{2x}+3^{-2x}=2^2+2=6$

また，$(3^x+3^{-x})^2=3^{2x}+3^{-2x}+2$ から　$(3^x+3^{-x})^2=6+2=8$

ここで，$3^x>0$，$3^{-x}>0$ であるから　$3^x+3^{-x}>0$　　よって　$3^x+3^{-x}=\mathbf{2\sqrt{2}}$

②　$3^x-3^{-x}=2$，$3^x+3^{-x}=2\sqrt{2}$ から　　$3^x=\mathbf{1+\sqrt{2}}$

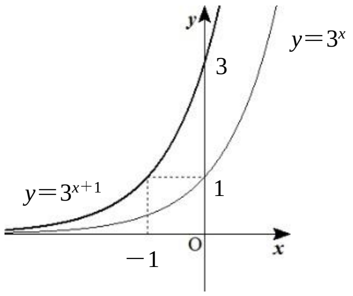
3

次の関数のグラフをかき，$y=3^x$ との位置関係を答えよ。

(1)　$y=3^{x+1}$　　　　(2)　$y=-\left(\frac{1}{3}\right)^x$

解答

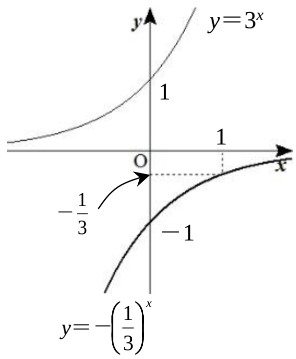
(1)　$f(x)=3^x$ とすると，$3^{x+1}=f(x+1)$であるので，**$y=3^{x+1}$ のグラフは $y=3^x$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したグラフ**である。



(2)　$f(x)=3^x$ とする。

$-\left(\frac{1}{3}\right)^x=-(3^{-1})^x=-3^{-x}=-f(-x)$

であるので，**$y=-\left(\frac{1}{3}\right)^x$ のグラフは $y=3^x$ のグラフを原点に関して対称移動したグラフ**である。



$\boxed{4}$

(1)　次の 3 数の大小を比較せよ。　$\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[6]{2}}$，$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{4}}$，$\dfrac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[10]{2}}$

(2)　次の 2 数の大小を比較せよ。　$\sqrt{2}$，$\sqrt[5]{6}$

解答

(1)　$\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[6]{2}}=\dfrac{2^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{6}}}=2^{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}=2^{\frac{3-2}{12}}=2^{\frac{1}{12}}$，　$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{4}}=\dfrac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{2}{5}}}=2^{\frac{1}{2}-\frac{2}{5}}=2^{\frac{5-4}{10}}=2^{\frac{1}{10}}$，　$\dfrac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[10]{2}}=\dfrac{2^{\frac{1}{6}}}{2^{\frac{1}{10}}}=2^{\frac{1}{6}-\frac{1}{10}}=2^{\frac{5-3}{30}}=2^{\frac{1}{15}}$

底 2 は 1 より大きく，指数の大小は，$\dfrac{1}{15}<\dfrac{1}{12}<\dfrac{1}{10}$ であるから　$2^{\frac{1}{15}}<2^{\frac{1}{12}}<2^{\frac{1}{10}}$

すなわち　$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[10]{2}}<\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[6]{2}}<\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{4}}}$

(2)　$\sqrt{2}$，$\sqrt[5]{6}$ のそれぞれを 10 乗すると

$$\left(\sqrt{2}\right)^{10}=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10}=2^5=32,\qquad \left(\sqrt[5]{6}\right)^{10}=\left(6^{\frac{1}{5}}\right)^{10}=6^2=36$$

32＜36 であるから　$\boldsymbol{\sqrt{2}<\sqrt[5]{6}}$

$\boxed{5}$

(1)　$4^{x-1}=2\sqrt{2}$　　(2)　$4^{x-1}\geqq 2\sqrt{2}$

(3)　$\left(\dfrac{1}{9}\right)^x<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　(4)　$8^x-2^{x+2}=0$

解答

(1)　$4^{x-1}=(2^2)^{x-1}=2^{2x-2}$，　$2\sqrt{2}=2^1\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2^{1+\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}}$ より　$2^{2x-2}=2^{\frac{3}{2}}$

よって　$2x-2=\dfrac{3}{2}$　　したがって　$\boldsymbol{x=\dfrac{7}{4}}$

(2)　(1)より　$2^{2x-2}\geqq 2^{\frac{3}{2}}$　　2 は 1 より大きいから　$2x-2\geqq\dfrac{3}{2}$　　したがって　$\boldsymbol{x\geqq\dfrac{7}{4}}$

(3)　底を 3 にそろえる。

$\left(\dfrac{1}{9}\right)^x=(3^{-2})^x=3^{-2x}$，　$\dfrac{1}{\sqrt{3}}=3^{-\frac{1}{2}}$　　よって　$3^{-2x}<3^{-\frac{1}{2}}$

3 は 1 より大きいから　$-2x<-\dfrac{1}{2}$　　したがって　$\boldsymbol{x>\dfrac{1}{4}}$

$\boxed{\text{別解}}$　底を$\dfrac{1}{3}$にそろえる。

$$\left(\frac{1}{9}\right)^x=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x},\qquad \frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\qquad \text{よって}\quad \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}<\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\dfrac{1}{3}$は1より小さいから　$2x>\dfrac{1}{2}$　　したがって　$x>\dfrac{1}{4}$

(4)　$8^x=(2^3)^x=2^{3x}=(2^x)^3$,　$2^{x+2}=4\cdot 2^x$より　$(2^x)^3-4\cdot 2^x=0$　　ここで，$2^x=t$とおくと　$t>0$

このとき，方程式は　$t^3-4t=0$　　$t(t+2)(t-2)=0$　　$t>0$であるから　$t=2$

すなわち　$2^x=2$　　これを解いて　$\boldsymbol{x=1}$

$\boxed{6}$

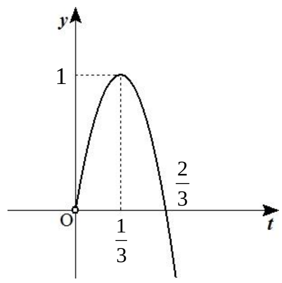
(1)　関数$y=6\cdot 3^x-9^{x+1}$における最大値を求めよ。

(2)　$y=2(2^x+2^{-x})+4^x+4^{-x}$とする。$2^x+2^{-x}=t$とおくとき，$y$を$t$を用いて表せ。

また，関数yの最小値を求めよ。

解答

(1)　$3^x=t$とおくと　$t>0$



このとき関数は　$y=6\cdot 3^x-9^{x+1}=-9\cdot(3^x)^2+6\cdot 3^x$

$$=-9t^2+6t=-9\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+1$$

$t>0$であるから，右のグラフより，$t=\dfrac{1}{3}$のとき最大値1 をとる。

$t=\dfrac{1}{3}$のとき　$3^x=\dfrac{1}{3}$　　よって　$x=-1$

したがって，この関数は　**$x=-1$のとき最大値1** をとる。

(2)　$(2^x+2^{-x})^2=(2^x)^2+2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}+(2^{-x})^2=2^{2x}+2\cdot 2^{x-x}+2^{-2x}=(2^2)^x+2\cdot 2^0+(2^2)^{-x}=4^x+2+4^{-x}$

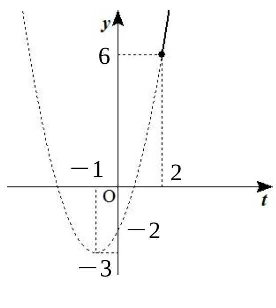
よって，$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$と表すことができる。

したがって　$y=2(2^x+2^{-x})+4^x+4^{-x}=2t+(t^2-2)\boldsymbol{=t^2+2t-2}$

また，$2^x>0$，$2^{-x}>0$であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$t=2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$$

ここで　$y=t^2+2t-2=(t+1)^2-3$



右のグラフより，$t=2$のとき最小値6をとる。

ここで　$t=2$　　すなわち　$2^x+2^{-x}=2$を満たすxは

相加平均と相乗平均の大小関係において等号が成立し

ているときであるから

$2^x=2^{-x}$　　よって　$x=-x$　　$x=0$

したがって，この関数は　**$x=0$のとき最小値6** をとる。

$\boxed{7}$

(1)　次の対数の値を求めよ。

①　$\log_2 \dfrac{1}{8}$　　　②　$\log_3 \sqrt{3}$

(2)　次の式を簡単にせよ。

①　$\log_4 8-\log_4 2$　　　②　$\log_{12} 8+\log_{12} 18$

(3)　次の式を簡単にせよ。

①　$\log_{\sqrt{2}} \dfrac{1}{4}$　　　②　$\log_4 9\cdot\log_3 8$

解答

(1)　①　$\log_2 \dfrac{1}{8}=\log_2 2^{-3}=\mathbf{-3}$

②　$\log_3 \sqrt{3}=\log_3 3^{\frac{1}{2}}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

(2)　①　$\log_4 8-\log_4 2=\log_4 \dfrac{8}{2}=\log_4 4=\mathbf{1}$

②　$\log_{12} 8+\log_{12} 18=\log_{12} 144=\log_{2} 12^2=\mathbf{2}$

(3)　①　底を 2 に変換する。　$\log_{\sqrt{2}} \dfrac{1}{4}=\dfrac{\log_2 \frac{1}{4}}{\log_2 \sqrt{2}}=\dfrac{\log_2 2^{-2}}{\log_2 2^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{-2}{\frac{1}{2}}=\mathbf{-4}$

②　底を 2 にそろえる。　$\log_4 9\cdot\log_3 8=\dfrac{\log_2 9}{\log_2 4}\cdot\dfrac{\log_2 8}{\log_2 3}=\dfrac{\log_2 3^2}{\log_2 2^2}\cdot\dfrac{\log_2 2^3}{\log_2 3}=\dfrac{2\log_2 3}{2}\cdot\dfrac{3}{\log_2 3}=\mathbf{3}$

$\boxed{\text{別解}}$　底を 3 にそろえる。

$$\log_4 9\cdot\log_3 8=\frac{\log_3 9}{\log_3 4}\cdot\log_3 8=\frac{\log_3 3^2}{\log_3 2^2}\cdot\log_3 2^3=\frac{2}{2\log_3 2}\cdot 3\log_3 2=3$$

$\boxed{8}$

$\log_3 5=a$，$\log_7 9=b$ とするとき，$\log_5 7$ を a，b で表せ。

解答

$\log_5 7=\dfrac{\log_3 7}{\log_3 5}=\dfrac{\log_3 7}{a}$

ここで，$b=\log_7 9=\dfrac{\log_3 9}{\log_3 7}=\dfrac{\log_3 3^2}{\log_3 7}=\dfrac{2}{\log_3 7}$ であるから　$\log_3 7=\dfrac{2}{b}$

よって　$\log_5 7=\dfrac{\frac{2}{b}}{a}=\boldsymbol{\dfrac{2}{ab}}$

9

次の空欄を埋めよ。

$y=\log_8 4(x-1)^3$ のグラフは，$y=\log_2 x$ のグラフを x 軸方向に$\boxed{}$，y 軸方向に$\boxed{}$だけ平行移動したグラフである。

解答

底を変換公式を利用して，$\log_8 4(x-1)^3$ の底を 2 に変換する。

$$\log_8 4(x-1)^3=\frac{\log_2 4(x-1)^3}{\log_2 8}=\frac{\log_2 4+\log_2 (x-1)^3}{\log_2 2^3}=\frac{\log_2 2^2+3\log_2 (x-1)}{3}=\frac{2}{3}+\log_2(x-1)$$

$f(x)=\log_2 x$ とすると，$\log_2(x-1)=f(x-1)$であるから，$y=\log_8 4(x-1)^3$ のグラフは $y=\log_2 x$ のグラフを

x 軸方向に $\mathbf{1}$ ，y 軸方向に $\boldsymbol{\frac{2}{3}}$ だけ平行移動したグラフである。

１０

(1)　次の 3 数の大小を比較せよ。　　2，$\log_2 6$，$\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{27}$

(2)　次の 2 数の大小を比較せよ。　　$\log_2 3$，$\log_3 4$

解答

(1)　$2=2\cdot\log_2 2=\log_2 2^2=\log_2 4$

$$\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{27}=\frac{\log_2 \frac{1}{27}}{\log_2 \frac{1}{4}}=\frac{\log_2 3^{-3}}{\log_2 2^{-2}}=\frac{-3\log_2 3}{-2}=\frac{3}{2}\cdot\log_2 3=\log_2 3^{\frac{3}{2}}=\log_2 \sqrt{27}$$

底 2 は 1 より大きく，$4<\sqrt{27}<6$ であるから　$\log_2 4<\log_2 \sqrt{27}<\log_2 6$

すなわち　$\boldsymbol{2<\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{27}<\log_2 6}$

(2)　$P=\log_2 3-\log_3 4$ とおく。

$$P=\log_2 3-\frac{\log_2 4}{\log_2 3}=\frac{(\log_2 3)^2-2}{\log_2 3}$$

ここで　$(\log_2 3)^2-2=(\log_2 3+\sqrt{2})(\log_2 3-\sqrt{2})$　　$\log_2 3>0$ より　$\frac{1}{\log_2 3}>0$，$\log_2 3+\sqrt{2}>0$

であるから，$\log_2 3-\sqrt{2}$ の正負と P の正負が一致する。ここで，$\sqrt{2}<\frac{3}{2}$ であるから

$$\log_2 3-\sqrt{2}>\log_2 3-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}(2\log_2 3-3)=\frac{1}{2}(\log_2 3^2-\log_2 2^3)=\frac{1}{2}(\log_2 9-\log_2 8)>0$$

したがって，$P>0$ であるから　$\boldsymbol{\log_2 3>\log_3 4}$

$\boxed{１１}$

(1)　$4^{\log_2\sqrt{2}}$ の値を求めよ。

(2)　次の方程式を解け。

①　$\log_3(x+1)=\log_9(x+3)$　　②　$(\log_{\frac{1}{2}} x)^2+\log_{\frac{1}{2}} x^2=0$

(3)　次の不等式を解け。

①　$\log_{\frac{1}{3}}(x^2+5)>-2$　　②　$\log_2 x+\log_4(x+1)<\dfrac{1}{2}$

解答

(1)　$4^{\log_2\sqrt{2}}=x$ とおき，両辺の 2 を底とする対数をとると

$\log_2 4^{\log_2\sqrt{2}}=\log_2 x$　　すなわち　$\log_2\sqrt{2}\cdot\log_2 4=\log_2 x$

ここで　$\log_2\sqrt{2}\cdot\log_2 4=2\log_2\sqrt{2}=\log_2(\sqrt{2})^2=\log_2 2$

よって　$\log_2 2=\log_2 x$　　したがって　$\boldsymbol{x=2}$

(2)　①　真数は正であるから　$x+1>0$ かつ $x+3>0$　　すなわち　$x>-1$　……(ⅰ)

ここで，$\log_9(x+3)=\dfrac{\log_3(x+3)}{\log_3 9}=\dfrac{\log_3(x+3)}{2}$ であるから，方程式の両辺に 2 を掛けると

$2\log_3(x+1)=\log_3(x+3)$　　すなわち　$\log_3(x+1)^2=\log_3(x+3)$

よって，$(x+1)^2=(x+3)$から　$x^2+2x+1=x+3$　　整理すると　$(x+2)(x-1)=0$

(ⅰ)から　$\boldsymbol{x=1}$

②　真数は正であるから　$x>0$ かつ $x^2>0$　　すなわち　$x>0$　……(ⅰ)

$\log_{\frac{1}{2}} x=t$ とおくと，$\log_{\frac{1}{2}} x^2=2\log_{\frac{1}{2}} x=2t$ から，方程式は　$t^2+2t=0$　　$t(t+2)=0$

これを解くと　$t=0,\ -2$　　すなわち　$\log_{\frac{1}{2}} x=0,\ -2$　　よって　$x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^0,\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$

したがって　$\boldsymbol{x=1,\ 4}$　　これは，(ⅰ)を満たす。

(3)　①　$x^2+5>0$ であるから，真数はつねに正である。

$-2=\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}=\log_{\frac{1}{3}} 9$　　よって，不等式は　$\log_{\frac{1}{3}}(x^2+5)>\log_{\frac{1}{3}} 9$

底$\dfrac{1}{3}$は 1 より小さいから　$x^2+5<9$　　$x^2-4<0$　　したがって　$\boldsymbol{-2<x<2}$

② 真数は正であるから　$x>0$ かつ $x+1>0$　　すなわち　$x>0$　……(ⅰ)

ここで，$\log_4(x+1)=\dfrac{\log_2(x+1)}{\log_2 4}=\dfrac{\log_2(x+1)}{2}$ であるから，不等式の両辺に 2 を掛けると

$$2\log_2 x+\log_2(x+1)<1 \quad \text{すなわち} \quad \log_2 x^2(x+1)<\log_2 2$$

よって，底 2 は 1 より大きいから　$x^2(x+1)<2$

すなわち　$x^3+x^2-2<0$

左辺を因数分解すると　$(x-1)(x^2+2x+2)<0$

$x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$ であることから，

不等式の解は　$x<1$　……(ⅱ)

1	1	1	0	−2
		1	2	2
	1	2	2	0

(ⅰ)，(ⅱ)の共通な範囲を求めて　**$0<x<1$**

１２

(1)　関数 $y=(\log_{\frac{1}{9}} x)^2+\log_3 x$ の最小値を求めよ。

(2)　関数 $y=(\log_2 2x)(\log_{\frac{1}{4}} x)$ の最大値を求めよ。

解答

(1)　$\log_{\frac{1}{9}} x=\dfrac{\log_3 x}{\log_3 \frac{1}{9}}=\dfrac{\log_3 x}{-2}$ より，$y=\dfrac{(\log_3 x)^2}{4}+\log_3 x$ であるから

$\log_3 x=t$ とおくと　$y=\dfrac{t^2}{4}+t=\dfrac{1}{4}(t^2+4t)=\dfrac{1}{4}\{(t+2)^2-4\}=\dfrac{1}{4}(t+2)^2-1$

$t=-2$ のとき最小値 -1 をとる。$t=-2$ のとき　$\log_3 x=-2$　　よって　$x=3^{-2}=\dfrac{1}{9}$

したがって，この関数は　**$x=\dfrac{1}{9}$ のとき最小値 -1** をとる。

(2)　$y=(\log_2 2x)(\log_{\frac{1}{4}} x)=(1+\log_2 x)\left(\dfrac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{4}}\right)=(1+\log_2 x)\left(\dfrac{\log_2 x}{-2}\right)$ であるから

$\log_2 x=t$ とおくと　$y=(1+t)\left(-\dfrac{1}{2}t\right)=-\dfrac{1}{2}(t^2+t)=-\dfrac{1}{2}\left\{\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\right\}=-\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{8}$

$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{8}$ をとる。$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき　$\log_2 x=-\dfrac{1}{2}$　　よって　$x=2^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

したがって，この関数は　**$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{8}$** をとる。

１３

$\log_{10}2=0.3010$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　5^{20} は何桁の整数か。

(2)　$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{25}$ は小数で表すと，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

解答

(1)　5^{20} の常用対数の値を求める。

$$\log_{10}5^{20}=20\log_{10}5=20\log_{10}\frac{10}{2}=20(\log_{10}10-\log_{10}2)=20(1-0.3010)=13.98$$

よって　$5^{20}=10^{13.98}$　　$10^{13}<10^{13.98}<10^{14}$ であるから　　$10^{13}<5^{20}<10^{14}$

したがって，5^{20} は **14 桁**の整数である。

(2)　$\log_{10}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{25}=25\log_{10}\dfrac{1}{4}=25\cdot(-\log_{10}4)=25\cdot(-2\log_{10}2)=25\cdot(-2\cdot0.3010)=-15.05$

よって　$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{25}=10^{-15.05}$　　$10^{-16}<10^{-15.05}<10^{-15}$ であるから　　$10^{-16}<\left(\dfrac{1}{4}\right)^{25}<10^{-15}$

したがって，$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{25}$ は**小数第 16 位に初めて 0 でない数字が現れる。**

研究

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とし，$N=6^{20}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　N は何桁の整数か。　　(2)　N の最高位の数を求めよ。　　(3)　N の一の位の数を求めよ。

解答

(1)　$\log_{10}6^{20}=20\log_{10}6=20(\log_{10}2+\log_{10}3)=20(0.3010+0.4771)=15.562$

よって　$6^{20}=10^{15.562}$　　$10^{15}<10^{15.562}<10^{16}$ であるから　　$10^{15}<6^{20}<10^{16}$

したがって，6^{20} は **16 桁**の整数である。

(2)　(1)から　$\log_{10}6^{20}=15.562=15+0.562$　　ここで，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}4=2\log_{10}2=0.6020$ であるから　$\log_{10}3<0.562<\log_{10}4$　　よって　$3<10^{0.562}<4$

辺々に 10^{15} を掛けると　$3\cdot10^{15}<10^{15.562}<4\cdot10^{15}$　　すなわち　$3\cdot10^{15}<6^{20}<4\cdot10^{15}$

したがって，6^{20} の最高位の数は　**3**

(3)　6 を n 乗したときの一の位の数を a_n とする。

$6^1=6$ より　$a_1=6$，　　$6^2=36$ より　$a_2=6$，　　$6^3=216$ より　$a_3=6$，……

6^n の一の位の数はつねに 6 である。よって　$a_{20}=6$

したがって，6^{20} の一の位の数は　**6**