統計的な推測

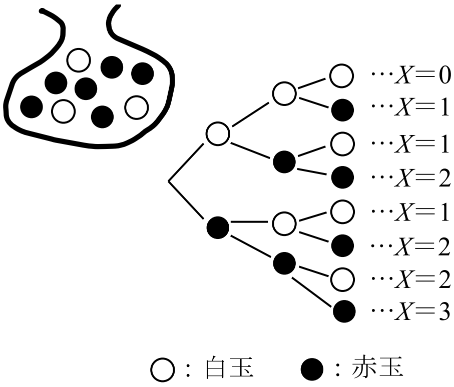
以下，根元事象はすべて同様に確からしいとする。

1

赤玉 6 個と白玉 3 個が入っている袋から，3 個の玉を取り出すとき，取り出した赤玉の個数 X の確率分布を求めよ。また，確率 $P(X \leqq 2)$を求めよ。

解答

玉の出方は右の樹形図のようになり，
X のとり得る値は 0，1，2，3 である。



$$P(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{1}{\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}}=\frac{1}{84}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_6\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{6\cdot\frac{3\cdot2}{2\cdot1}}{\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}}=\frac{18}{84}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_6\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{\frac{6\cdot5}{2\cdot1}\cdot3}{\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}}=\frac{45}{84}$$

$$P(X=3)=\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}}{\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1}}=\frac{20}{84}$$

X の確率分布は，右の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{84}$	$\frac{18}{84}$	$\frac{45}{84}$	$\frac{20}{84}$	1

また　$P(X\leqq2)=\frac{1}{84}+\frac{18}{84}+\frac{45}{84}=\frac{64}{84}=\boldsymbol{\frac{16}{21}}$

2

右の表のような賞金がついている
30 本のくじがある。
このくじを 1 本引くとき，賞金の
平均を求めよ。

	賞金	本数
1 等	10000 円	1 本
2 等	1000 円	4 本
3 等	100 円	25 本

解答

このくじを 1 本引いたときの賞金を X 円とすると，
確率変数 X の確率分布は右の表のようになる。
よって，賞金の平均 $E(X)$ は

X	10000	1000	100	計
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{25}{30}$	1

$$E(X)=10000\times\frac{1}{30}+1000\times\frac{4}{30}+100\times\frac{25}{30}=\mathbf{550}\text{（円）}$$

$\boxed{3}$
赤玉 6 個と白玉 3 個が入っている袋から，3 個の玉を取り出すとき，取り出した赤玉の個数 X の平均，分散，標準偏差を求めよ。

解答

$\boxed{1}$より，X の確率分布は，右の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{84}$	$\frac{18}{84}$	$\frac{45}{84}$	$\frac{20}{84}$	1

よって，***X* の平均 *E*(*X*)は**

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{84} + 1 \times \frac{18}{84} + 2 \times \frac{45}{84} + 3 \times \frac{20}{84}$$

$$= \frac{0 + 18 + 90 + 60}{84} = \mathbf{2}\text{（個）}$$

***X* の分散 *V*(*X*)は**

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 0^2 \times \frac{1}{84} + 1^2 \times \frac{18}{84} + 2^2 \times \frac{45}{84} + 3^2 \times \frac{20}{84} - 2^2$$

$$= \frac{0 + 18 + 180 + 180}{84} - 4 = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

***X*の標準偏差*σ*(*X*)は**　$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}$（個）

$\boxed{\text{分散 } V(X) \text{の別解}}$

$$V(X) = E((X - m)^2) = (0 - 2)^2 \times \frac{1}{84} + (1 - 2)^2 \times \frac{18}{84} + (2 - 2)^2 \times \frac{45}{84} + (3 - 2)^2 \times \frac{20}{84}$$

$$= \frac{4 + 18 + 0 + 20}{84} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{4}$

1 枚の硬貨を 4 回投げるときの表が出た回数を X とする。確率変数 X の平均，分散，標準偏差を求めよ。
また，$Y=3X+2$ で定められる確率変数 Y の平均，分散，標準偏差を求めよ。

解答

確率変数 X は，右の表のような確率分布に従う。

X	0	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{6}$	1

$$P(X=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$P(X=1)={}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$P(X=2)={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$P(X=3)={}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$P(X=4)={}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

よって，**X の平均 $E(X)$は**

$$E(X)=0\times\frac{1}{16}+1\times\frac{4}{16}+2\times\frac{6}{16}+3\times\frac{4}{16}+4\times\frac{1}{16}=\frac{32}{16}=\mathbf{2}$$

X の分散 $V(X)$は

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$

$$=0^2\times\frac{1}{16}+1^2\times\frac{4}{16}+2^2\times\frac{6}{16}+3^2\times\frac{4}{16}+4^2\times\frac{1}{16}-2^2$$

$$=\frac{0+4+24+36+16}{16}-4=\frac{80}{16}-4=\mathbf{1}$$

Xの標準偏差$\sigma(X)$は　$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1}=\mathbf{1}$

また，**Yの平均$E(Y)$は**　$E(Y)=E(3X+2)=3E(X)+2=3\cdot 2+2=\mathbf{8}$

Yの分散$V(Y)$は　$V(Y)=V(3X+2)=3^2V(X)=9\cdot 1=\mathbf{9}$

Yの標準偏差$\sigma(Y)$は　$\sigma(Y)=\sigma(3X+2)=|\,3\,|\,\sigma(X)=3\cdot 1=\mathbf{3}$

5

1 個のさいころを 4 回繰り返し投げるとき，2 以下の目が出る回数を X とする。X の確率分布を求めよ。
また，2 以下の目が 3 回以上出る確率を求めよ。

解答

1 回の試行で 2 以下の目が出る確率は$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$である。よって，確率変数Xは二項分布$B\left(4,\ \frac{1}{3}\right)$に従う。

さいころの 2 以下の目がr回出る確率は　$P(X=r)={}_4\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{3}\right)^r\left(\frac{2}{3}\right)^{4-r}$　（$r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$）

であるから，X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	2	3	4	計
P	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$	1

また，2 以下の目が 3 回以上出る確率 $P(X\geqq 3)$は

$$P(X\geqq 3)=\frac{8}{81}+\frac{1}{81}=\frac{9}{81}=\mathbf{\frac{1}{9}}$$

$\boxed{6}$
1 個のさいころを 360 回投げるとき，5 の目が出る回数 X の平均，分散，標準偏差を求めよ。

解答

確率変数Xは，二項分布$B\left(360,\ \frac{1}{6}\right)$に従う。

よって，**Xの平均$E(X)$は**　$E(X)=360\cdot\frac{1}{6}=\mathbf{60}$(回)

Xの分散$V(X)$は　$V(X)=360\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\mathbf{50}$

Xの標準偏差$\sigma(X)$は　$\sigma(X)=\sqrt{50}=\mathbf{5\sqrt{2}}$（回）

$\boxed{7}$

確率変数Xのとり得る値xの範囲が $0 \leqq x \leqq 2$ で，その確率密度関数が$f(x) = \dfrac{1}{2}x\ (0 \leqq x \leqq 2)$ で

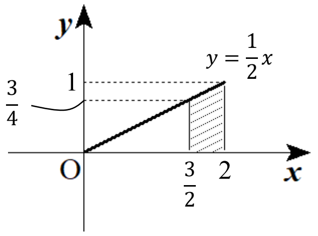
表されるとき，確率$P\left(\dfrac{3}{2} \leqq X \leqq 2\right)$を求めよ。

解答

右の図から

$$P\left(\frac{3}{2} \leqq X \leqq 2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+1\right)\cdot\left(2-\frac{3}{2}\right)$$

$$= \mathbf{\frac{7}{16}}$$



8

次の問いに答えよ。

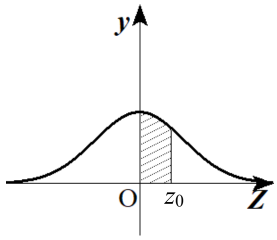
(1) 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，次の確率を求めよ。

　① $P(-1 \leqq Z \leqq 1)$

　② $P(Z \geqq -0.5)$

(2) 確率変数 X が正規分布 $N(1,\ 4^2)$ に従うとき，$P(2 \leqq X \leqq 9)$ を求めよ。

(3) モンシロチョウを 100 匹採集したところ，体長の平均が 19.6mm，標準偏差は 0.5mm であった。モンシロチョウの体長は正規分布に従うものとするとき，20mm 以上となるのはおよそ何匹いるか。



正規分布表

z_0	0	～	3	～	5	6	7	8
0.2	0.0793		0.0910		0.0987	0.1026	0.1064	0.1103
～								
0.5	0.1915		0.2109		0.2088	0.2123	0.2157	0.2190
～								
0.8	0.2881		0.2967		0.3023	0.3051	0.3078	0.3106
～								
1.0	0.3413		0.3485		0.3531	0.3554	0.3577	0.3599
～								
1.2	0.3849		0.3907		0.3944	0.3962	0.3980	0.3997
～								
1.6	0.4452		0.4484		0.4505	0.4515	0.4525	0.4535
～								
1.9	0.4713		0.4732		0.4744	0.4750	0.4756	0.4761
2.0	0.4772		0.4788		0.4798	0.4803	0.4808	0.4812
～								
2.3	0.4893		0.4901		0.4906	0.4909	0.4911	0.4913
～								
2.5	0.4938		0.4943		0.4946	0.4948	0.4949	0.4951

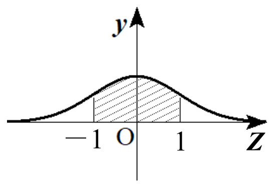
当該ファイルに関連のある部分を抜粋しています。

解答

(1) ① $P(-1 \leqq Z \leqq 1) = 2 \times P(0 \leqq Z \leqq 1)$

$= 2 \times 0.3413$

$= \mathbf{0.6826}$

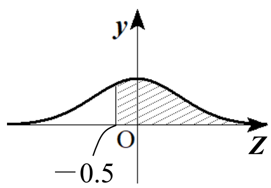


② $P(Z \geqq -0.5) = P(-0.5 \leqq Z \leqq 0) + P(Z \geqq 0)$

$= P(0 \leqq Z \leqq 0.5) + P(Z \leqq 0)$

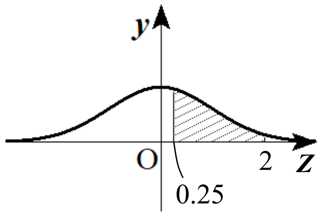
$= 0.1915 + 0.5$

$= \mathbf{0.6915}$



(2)　$Z=\dfrac{X-1}{4}$ とおくと，確率変数Zは$N(0,\ 1)$に従う。

$X=2$ のとき$Z=\dfrac{2-1}{4}=0.25$，$X=9$ のとき$Z=\dfrac{9-1}{4}=2$



であるから

$P(2\leqq X\leqq 9)=P(0.25\leqq Z\leqq 2)$

$=P(0\leqq Z\leqq 2)-P(0\leqq Z\leqq 0.25)$

$=0.4772-0.0978$

$=\mathbf{0.3794}$

(3)　体長をXmm とすると，Xは$N(19.6,\ 0.5^2)$に従うから　$Z=\dfrac{X-19.6}{0.5}$ とおくと，

Zは$N(0,\ 1)$に従う。

$X=20$ のとき$Z=\dfrac{20-19.6}{0.5}=0.8$

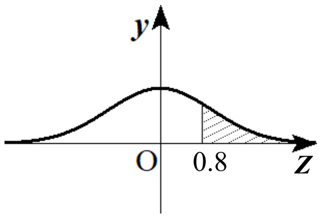
であるから

$P(X\geqq 20)=P(Z\geqq 0.8)$

$=P(Z\geqq 0)-P(0\leqq Z\leqq 0.8)$

$=0.5-0.2881$

$=0.2119$



よって，体長が 20mm 以上のモンシロチョウは

$100\times 0.2119=21.19$

したがって，およそ　**21 匹**

9
けん玉の成功率が 96%の人がいる。この人がけん玉を 150 回行ったとき，成功が 140 回以下になる確率を求めよ。

解答

けん玉が成功した回数をXとすると，Xは二項分布$B\left(150,\ \frac{24}{25}\right)$に従う。

よって，Xの平均mは　$m = 150 \cdot \frac{24}{25} = 144$(回),

標準偏差σは　$\sigma = \sqrt{150 \cdot \frac{24}{25}\left(1 - \frac{24}{25}\right)} = \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5}$(回)

150 は十分大きいから，X は正規分布 $N(144,\ 2.4^2)$に従うとみなしてよい。

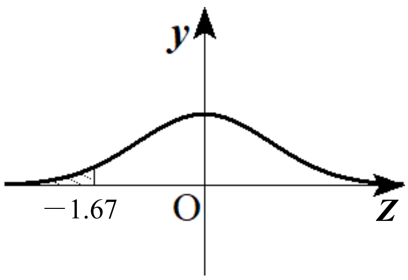
これより，$Z = \frac{X - 144}{2.4}$ とおくと，Zは標準正規分布$N(0,\ 1)$に従うとみなしてよい。

以上から，求める確率は

$P(X \leqq 140) = P(Z \leqq -1.67)$
$= P(Z \geqq 0) - P(0 \leqq Z \leqq 1.67)$
$= 0.5 - 0.4525$
$= \mathbf{0.0475}$

$X = 140$ のとき

$Z = \frac{140 - 144}{2.4} = -\frac{5}{3} \fallingdotseq -1.67$



１０

次の問いに答えよ。

(1)　1 個のさいころを 3 回投げて出た目をX_1，X_2，X_3とし，その平均を$\bar{X}=\dfrac{X_1+X_2+X_3}{3}$とする。

$\bar{X}$の平均$E(\bar{X})$，標準偏差$\sigma(\bar{X})$を求めよ。

(2)　ある畑でとれるさつまいもは，平均 270g，標準偏差 30g の正規分布に従うことが知られている。無作為に 36 本を抽出したとき，その標本平均$\bar{X}$が 264g 以下である確率を求めよ。

解答

(1)　1 個のさいころを 1 回投げたときの出た目 X の確率分布は，右の表のようになる。

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

よって，X の平均 $E(X)$は

$$E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$$

X の標準偏差 $\sigma(X)$は

$$\sigma(X)=\sqrt{E(X^2)-\{E(X)\}^2}=\sqrt{1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}+5^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{91}{6}-\frac{49}{4}}=\sqrt{\frac{182-147}{12}}=\sqrt{\frac{35}{12}}=\frac{\sqrt{105}}{6}$$

したがって，大きさ 3 の標本の標本平均$\bar{X}$の平均$E(\bar{X})$は　$\boldsymbol{E(\bar{X})=(\text{母平均})=\frac{7}{2}}$

標準偏差$\sigma(\bar{X})$は　$\boldsymbol{\sigma(\bar{X})}=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{105}}{6}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{35}}{6}}$

(2)　母集団分布が正規分布$N(270,\ 30^2)$であるから，標本平均$\bar{X}$は正規分布$N\left(270,\ \dfrac{30^2}{36}\right)$に従う。

よって，標準化した確率変数$Z=\dfrac{\bar{X}-270}{\frac{30}{\sqrt{36}}}=\dfrac{\bar{X}-270}{5}$は標準正規分布$N(0,\ 1)$に従う。

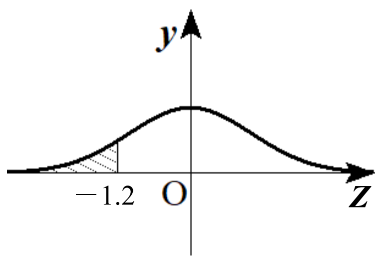
$\bar{X}$＝264 のとき Z＝－1.2 であるから，求める確率は

$P(\bar{X}≦264)＝P(Z≦－1.2)$

$＝P(Z≧0)－P(0≦Z≦1.2)$

＝0.5－0.3849

＝**0.1151**



１１

次の問いに答えよ。

(1)　ある川を遡上（そじょう）するアユの体長は，年によって平均体長の違いはあるものの，母標準偏差が 2.0cm の正規分布に従うことが知られている。ある年，この川の 16 匹のアユの体長を調べたところ，標本平均は 8.0cm であった。その年のアユの平均体長 m を信頼度 95%で区間推定せよ。

(2)　あるクレーンゲームで景品をとった人の中から，100 人を無作為抽出してかかった金額を聞いたところ，標本平均が 1000 円，標本標準偏差が 500 円であった。そのクレーンゲームで景品をとるときにかかる平均額を，信頼度 95%で区間推定せよ。

解答

(1)　母標準偏差 σ＝2.0，標本の大きさ n＝16，標本平均 $\bar{x}$ ＝8.0 であるから，m に対する信頼度 95% の

信頼区間は　　$8.0-1.96\times\frac{2.0}{\sqrt{16}}\leqq m\leqq 8.0+1.96\times\frac{2.0}{\sqrt{16}}$

すなわち　$7.02\leqq m\leqq 8.98$

したがって，その年のアユの平均体長は **7.0cm 以上 9.0cm 以下** と推定できる。

(2)　平均額を m とする。

標本の大きさ 100 は大きいので，母標準偏差 σ のかわりに標本標準偏差 s＝500 を用いる。

標本平均 $\bar{x}$ ＝1000 であるから，m に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$1000-1.96\times\frac{500}{\sqrt{100}}\leqq m\leqq 1000+1.96\times\frac{500}{\sqrt{100}}\qquad \text{すなわち}\quad 902\leqq m\leqq 1098$$

したがって，そのクレーンゲームで景品をとる平均額は **902 円以上 1098 円以下** と推定できる。

１２

ある高校のバスケットボール部員の，フリースローの記録を無作為に 144 回分抽出して調べたとき，92 回成功していた。そのバスケットボール部員のフリースロー成功率を，信頼度 95%で区間推定せよ。

解答

標本比率 $\bar{p}$ は　$\frac{92}{144} \fallingdotseq 0.64$　であるので，母比率 p の信頼度 95%の信頼区間は

$$0.64 - 1.96\sqrt{\frac{0.64 \times 0.36}{144}} \leqq p \leqq 0.64 + 1.96\sqrt{\frac{0.64 \times 0.36}{144}}$$

すなわち　$0.5616 \leqq p \leqq 0.7184$

したがって，そのバスケットボール部員のフリースロー成功率は，**56%以上 72%以下** と推定できる。

１３

「非常食を用意しているか？」など○，×で回答する 10 項目の防災アンケートを全国で実施したところ，○が平均 7.00 個，標準偏差 1.00 個であった。このアンケートをある市の無作為に抽出した 400 世帯で実施したところ，○は平均 6.88 個であった。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　ある市の結果は全国並みと判断してよいか。有意水準 5%で検定せよ。また，有意水準 1%で検定せよ。

(2)　ある市の市長は，この結果が全国より少ないかどうかに，より強い関心がある。ある市の結果は全国より少ないと判断してよいか。有意水準 1%で検定せよ。

解答

(1)　仮説を「結果は全国並みである。」とする。

○の平均を X 個とおくと，X は正規分布 $N\left(7.00,\ 1.00^2\right)$に従うので，標本平均$\bar{X}$は $N\left(7.00,\ \dfrac{1.00^2}{400}\right)$に従う。ここで，$Z=\dfrac{\bar{X}-7.00}{\dfrac{1.00}{\sqrt{400}}}$ とおくと，確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$に従う。

> 詳しくは
> 対立仮説「結果は全国並みではない。」，
> 帰無仮説「結果は全国並みである。」
> である。

信頼度 95%の信頼区間は$-1.96\leqq Z\leqq 1.96$ であるから

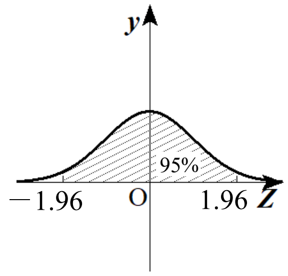
$$7.00-1.96\times\frac{1.00}{\sqrt{400}}\leqq \bar{X}\leqq 7.00+1.96\times\frac{1.00}{\sqrt{400}}$$

すなわち　$6.902\leqq\bar{X}\leqq 7.098$

観測された標本平均$\bar{x}=6.88$ はこの区間に入らないので，仮説は棄却される。

したがって，**有意水準 5%では，**ある市の結果は**全国並みではないと判断できる。**

> 有意水準 5%のとき，信頼度は $1-0.05=0.95$，すなわち 95%になる。



また，信頼度 99%の信頼区間は$-2.58\leqq Z\leqq 2.58$ であるから

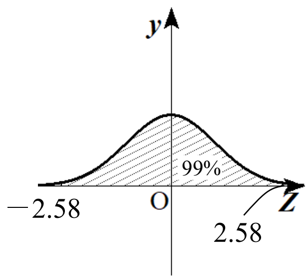
$$7.00-2.58\times\frac{1.00}{\sqrt{400}}\leqq \bar{X}\leqq 7.00+2.58\times\frac{1.00}{\sqrt{400}}$$

すなわち　$6.871\leqq\bar{X}\leqq 7.129$

観測された標本平均$\bar{x}=6.88$ はこの区間に入るので，仮説は棄却されない。

したがって，**有意水準 1%では，**ある市の結果は**全国並みではないとはいえない。**

> 有意水準 1%のとき，信頼度は $1-0.01=0.99$，すなわち 99%になる。



(2)　仮説を「結果は全国以上である。」
とする。
〇の平均を X 個とおくと，X は正規分布
$N\left(7.00,\ 1.00^2\right)$に従うときを調べればよい。
このとき，標本平均$\bar{X}$は $N\left(7.00,\ \dfrac{1.00^2}{400}\right)$に従う。

ここで，$Z=\dfrac{\bar{X}-7.00}{\dfrac{1.00}{\sqrt{400}}}$とおくと，確率変数$Z$は
標準正規分布 $N(0,\ 1)$に従う。

詳しくは
対立仮説「結果は全国より少ない。」,
帰無仮説「結果は全国以上である。」
である。
全国以上という仮説が棄却できるかどうかは,
全国並みとしたときの分布を調べればよい。

「結果は全国並みである。」の信頼度 99%の信頼区間は$-2.33\leqq Z$であるから

$$7.00-2.33\times\frac{1.00}{\sqrt{400}}\leqq\bar{X}$$

すなわち　$6.8835\leqq\bar{X}$
観測された標本平均$\bar{x}=6.88$ はこの区間に入らないので,
仮説は棄却される。
したがって，有意水準 1%では，ある市の結果は
全国より少ないと判断できる。