

統計的な推測

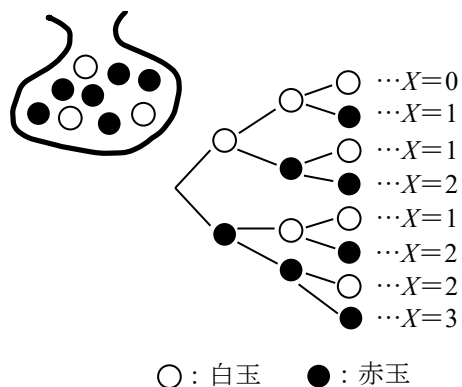
以下、根元事象はすべて同様に確からしいとする。

1

赤玉 6 個と白玉 3 個が入っている袋から、3 個の玉を取り出すとき、取り出した赤玉の個数 X の確率分布を求めよ。また、確率 $P(X \leq 2)$ を求めよ。

解答

玉の出方は右の樹形図のようになり、
 X のとり得る値は 0, 1, 2, 3 である。



$$P(X = 0) = \frac{{}_3C_3}{{}_9C_3} = \frac{1}{\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{1}{84}$$

$$P(X = 1) = \frac{{}_6C_1 \cdot {}_3C_2}{{}_9C_3} = \frac{6 \cdot \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1}}{\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{18}{84}$$

$$P(X = 2) = \frac{{}_6C_2 \cdot {}_3C_1}{{}_9C_3} = \frac{\frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot 3}{\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{45}{84}$$

$$P(X = 3) = \frac{{}_6C_3}{{}_9C_3} = \frac{\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{20}{84}$$

X の確率分布は、右の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{84}$	$\frac{18}{84}$	$\frac{45}{84}$	$\frac{20}{84}$	1

また $P(X \leq 2) = \frac{1}{84} + \frac{18}{84} + \frac{45}{84} = \frac{64}{84} = \frac{16}{21}$

2

右の表のような賞金がついている
30本のくじがある。
このくじを1本引くとき、賞金の
平均を求めよ。

	賞金	本数
1等	10000円	1本
2等	1000円	4本
3等	100円	25本

解答

このくじを1本引いたときの賞金を X 円とすると、
確率変数 X の確率分布は右の表のようになる。
よって、賞金の平均 $E(X)$ は

X	10000	1000	100	計
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{25}{30}$	1

$$E(X) = 10000 \times \frac{1}{30} + 1000 \times \frac{4}{30} + 100 \times \frac{25}{30} = 550 \text{ (円)}$$

3

赤玉 6 個と白玉 3 個が入っている袋から、3 個の玉を取り出すとき、取り出した赤玉の個数 X の平均、分散、標準偏差を求めよ。

解答

1 より、 X の確率分布は、右の表のようになる。

よって、 X の平均 $E(X)$ は

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \frac{1}{84} + 1 \times \frac{18}{84} + 2 \times \frac{45}{84} + 3 \times \frac{20}{84} \\ &= \frac{0 + 18 + 90 + 60}{84} = 2 \text{ (個)} \end{aligned}$$

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{84}$	$\frac{18}{84}$	$\frac{45}{84}$	$\frac{20}{84}$	1

X の分散 $V(X)$ は

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 0^2 \times \frac{1}{84} + 1^2 \times \frac{18}{84} + 2^2 \times \frac{45}{84} + 3^2 \times \frac{20}{84} - 2^2 \\ &= \frac{0 + 18 + 180 + 180}{84} - 4 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$X \text{ の標準偏差 } \sigma(X) \text{ は } \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (個)}$$

分散 $V(X)$ の別解

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X - m)^2) = (0 - 2)^2 \times \frac{1}{84} + (1 - 2)^2 \times \frac{18}{84} + (2 - 2)^2 \times \frac{45}{84} + (3 - 2)^2 \times \frac{20}{84} \\ &= \frac{4 + 18 + 0 + 20}{84} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4

1枚の硬貨を4回投げるときの表が出た回数を X とする。確率変数 X の平均、分散、標準偏差を求めよ。
また、 $Y=3X+2$ で定められる確率変数 Y の平均、分散、標準偏差を求めよ。

解答

確率変数 X は、右の表のような
確率分布に従う。

X	0	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{6}$	1

よって、 X の平均 $E(X)$ は

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{4}{16} + 2 \times \frac{6}{16} + 3 \times \frac{4}{16} + 4 \times \frac{1}{16} = \frac{32}{16} = 2$$

X の分散 $V(X)$ は

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= 0^2 \times \frac{1}{16} + 1^2 \times \frac{4}{16} + 2^2 \times \frac{6}{16} + 3^2 \times \frac{4}{16} + 4^2 \times \frac{1}{16} - 2^2 \\ &= \frac{0 + 4 + 24 + 36 + 16}{16} - 4 = \frac{80}{16} - 4 = 1 \end{aligned}$$

X の標準偏差 $\sigma(X)$ は $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1} = 1$

また、 Y の平均 $E(Y)$ は $E(Y) = E(3X+2) = 3E(X) + 2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8$

Y の分散 $V(Y)$ は $V(Y) = V(3X+2) = 3^2 V(X) = 9 \cdot 1 = 9$

Y の標準偏差 $\sigma(Y)$ は $\sigma(Y) = \sigma(3X+2) = |3| \sigma(X) = 3 \cdot 1 = 3$

$$P(X=0) = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$P(X=1) = {}_4C_1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$P(X=2) = {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$P(X=3) = {}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$P(X=4) = {}_4C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

5

1個のさいころを4回繰り返し投げるとき、2以下の目が出る回数を X とする。 X の確率分布を求めよ。
また、2以下の目が3回以上出る確率を求めよ。

解答

1回の試行で2以下の目が出る確率は $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ である。よって、確率変数 X は二項分布 $B\left(4, \frac{1}{3}\right)$ に従う。

さいころの2以下の目が r 回出る確率は $P(X=r) = {}_4C_r \left(\frac{1}{3}\right)^r \left(\frac{2}{3}\right)^{4-r}$ ($r=0, 1, 2, 3, 4$)

であるから、 X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	2	3	4	計
P	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$	1

また、2以下の目が3回以上出る確率 $P(X \geq 3)$ は

$$P(X \geq 3) = \frac{8}{81} + \frac{1}{81} = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}$$

6

1個のさいころを360回投げるとき、5の目が出る回数 X の平均、分散、標準偏差を求めよ。

解答

確率変数 X は、二項分布 $B\left(360, \frac{1}{6}\right)$ に従う。

よって、 X の平均 $E(X)$ は $E(X) = 360 \cdot \frac{1}{6} = 60$ (回)

X の分散 $V(X)$ は $V(X) = 360 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 50$

X の標準偏差 $\sigma(X)$ は $\sigma(X) = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ (回)

7

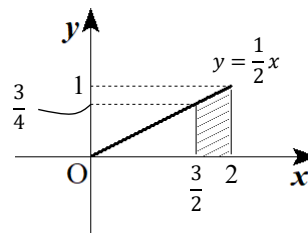
確率変数 X のとり得る値 x の範囲が $0 \leq x \leq 2$ で、その確率密度関数が $f(x) = \frac{1}{2}x$ ($0 \leq x \leq 2$)で

表されるとき、確率 $P\left(\frac{3}{2} \leq X \leq 2\right)$ を求めよ。

解答

右の図から

$$\begin{aligned} P\left(\frac{3}{2} \leq X \leq 2\right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} + 1\right) \cdot \left(2 - \frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{7}{16} \end{aligned}$$



8

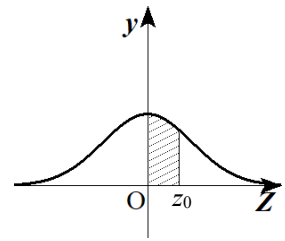
次の問いに答えよ。

(1) 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとき、次の確率を求めよ。

- ① $P(-1 \leq Z \leq 1)$
- ② $P(Z \geq -0.5)$

(2) 確率変数 X が正規分布 $N(1, 4^2)$ に従うとき、 $P(2 \leq X \leq 9)$ を求めよ。

(3) モンシロチョウを 100 匹採集したところ、体長の平均が 19.6mm、標準偏差は 0.5mm であった。モンシロチョウの体長は正規分布に従うものとするとき、20mm 以上となるのはおよそ何匹いるか。



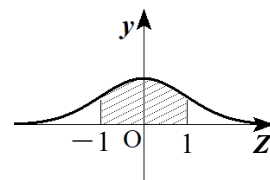
正規分布表

z_0	0	~	3	~	5	6	7	8
0.2	0.0793		0.0910		0.0987	0.1026	0.1064	0.1103
~								
0.5	0.1915		0.2109		0.2088	0.2123	0.2157	0.2190
~								
0.8	0.2881		0.2967		0.3023	0.3051	0.3078	0.3106
~								
1.0	0.3413		0.3485		0.3531	0.3554	0.3577	0.3599
~								
1.2	0.3849		0.3907		0.3944	0.3962	0.3980	0.3997
~								
1.6	0.4452		0.4484		0.4505	0.4515	0.4525	0.4535
~								
1.9	0.4713		0.4732		0.4744	0.4750	0.4756	0.4761
2.0	0.4772		0.4788		0.4798	0.4803	0.4808	0.4812
~								
2.3	0.4893		0.4901		0.4906	0.4909	0.4911	0.4913
~								
2.5	0.4938		0.4943		0.4946	0.4948	0.4949	0.4951

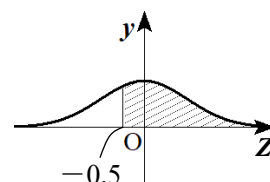
当該ファイルに関連のある部分を抜粋しています。

解答

(1) ① $P(-1 \leq Z \leq 1) = 2 \times P(0 \leq Z \leq 1)$
 $= 2 \times 0.3413$
 $= 0.6826$



② $P(Z \geq -0.5) = P(-0.5 \leq Z \leq 0) + P(Z \geq 0)$
 $= P(0 \leq Z \leq 0.5) + P(Z \leq 0)$
 $= 0.1915 + 0.5$
 $= 0.6915$

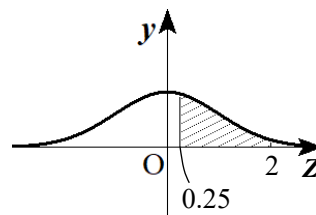


(2) $Z = \frac{X-1}{4}$ とおくと、確率変数 Z は $N(0, 1)$ に従う。

$$X = 2 \text{ のとき } Z = \frac{2-1}{4} = 0.25, \quad X = 9 \text{ のとき } Z = \frac{9-1}{4} = 2$$

であるから

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 9) &= P(0.25 \leq Z \leq 2) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 0.25) \\ &= 0.4772 - 0.0978 \\ &= \mathbf{0.3794} \end{aligned}$$



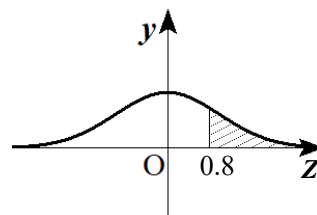
(3) 体長を X mm とすると、 X は $N(19.6, 0.5^2)$ に従うから $Z = \frac{X-19.6}{0.5}$ とおくと、

Z は $N(0, 1)$ に従う。

$$X = 20 \text{ のとき } Z = \frac{20-19.6}{0.5} = 0.8$$

であるから

$$\begin{aligned} P(X \geq 20) &= P(Z \geq 0.8) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 0.8) \\ &= 0.5 - 0.2881 \\ &= 0.2119 \end{aligned}$$



よって、体長が 20mm 以上のモンシロチョウは

$$100 \times 0.2119 = 21.19$$

したがって、およそ **21 匹**

9

けん玉の成功率が96%の人がいる。この人がけん玉を150回行ったとき、成功が140回以下になる確率を求めよ。

解答

けん玉が成功した回数を X とすると、 X は二項分布 $B\left(150, \frac{24}{25}\right)$ に従う。

よって、 X の平均 m は $m = 150 \cdot \frac{24}{25} = 144$ (回),

$$\text{標準偏差}\sigma \text{は } \sigma = \sqrt{150 \cdot \frac{24}{25} \left(1 - \frac{24}{25}\right)} = \sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{12}{5} \text{(回)}$$

150は十分大きいから、 X は正規分布 $N(144, 2.4^2)$ に従うとみなしてよい。

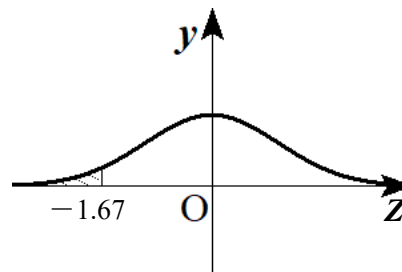
これより、 $Z = \frac{X - 144}{2.4}$ とおくと、 Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うとみなしてよい。

以上から、求める確率は

$$\begin{aligned} P(X \leq 140) &= P(Z \leq -1.67) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.67) \\ &= 0.5 - 0.4525 \\ &= \mathbf{0.0475} \end{aligned}$$

$X=140$ のとき

$$Z = \frac{140 - 144}{2.4} = -\frac{5}{3} \doteq -1.67$$



10

次の問いに答えよ。

(1) 1個のさいころを3回投げて出た目を X_1, X_2, X_3 とし、その平均を $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$ とする。

\bar{X} の平均 $E(\bar{X})$ 、標準偏差 $\sigma(\bar{X})$ を求めよ。

(2) ある畑でとれるさつまいもは、平均270g、標準偏差30gの正規分布に従うことが知られている。無作為に36本を抽出したとき、その標本平均 \bar{X} が264g以下である確率を求めよ。

解答

(1) 1個のさいころを1回投げたとき
の出た目 X の確率分布は、右の表
のようになる。

X	1	2	3	4	5	6	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

よって、 X の平均 $E(X)$ は

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

X の標準偏差 $\sigma(X)$ は

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= \sqrt{E(X^2) - \{E(X)\}^2} = \sqrt{1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{6} + 4^2 \times \frac{1}{6} + 5^2 \times \frac{1}{6} + 6^2 \times \frac{1}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{91}{6} - \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{182 - 147}{12}} = \sqrt{\frac{35}{12}} = \frac{\sqrt{105}}{6} \end{aligned}$$

したがって、大きさ3の標本の標本平均 \bar{X} の平均 $E(\bar{X})$ は $E(\bar{X}) = (\text{母平均}) = \frac{7}{2}$

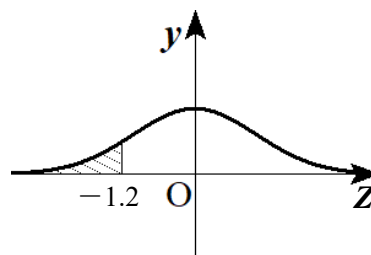
$$\text{標準偏差}\sigma(\bar{X}) \text{は } \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{105}}{6} = \frac{\sqrt{35}}{6}$$

(2) 母集団分布が正規分布 $N(270, 30^2)$ であるから、標本平均 \bar{X} は正規分布 $N\left(270, \frac{30^2}{36}\right)$ に従う。

よって、標準化した確率変数 $Z = \frac{\bar{X} - 270}{\frac{30}{\sqrt{36}}} = \frac{\bar{X} - 270}{5}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

$\bar{X} = 264$ のとき $Z = -1.2$ であるから、求める確率は

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \leq 264) &= P(Z \leq -1.2) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.2) \\ &= 0.5 - 0.3849 \\ &= \mathbf{0.1151} \end{aligned}$$



11

次の問いに答えよ。

- (1) ある川を遡上するアユの体長は、年によって平均体長の違いはあるものの、母標準偏差が 2.0cm の正規分布に従うことが知られている。ある年、この川の 16 匹のアユの体長を調べたところ、標本平均は 8.0cm であった。その年のアユの平均体長 m を信頼度 95% で区間推定せよ。
- (2) あるクレーンゲームで景品をとった人の中から、100 人を無作為抽出してかかった金額を聞いたところ、標本平均が 1000 円、標本標準偏差が 500 円であった。そのクレーンゲームで景品をとるときにかかる平均額を、信頼度 95% で区間推定せよ。

解答

- (1) 母標準偏差 $\sigma=2.0$ 、標本の大きさ $n=16$ 、標本平均 $\bar{x}=8.0$ であるから、 m に対する信頼度 95% の

$$\text{信頼区間は} \quad 8.0 - 1.96 \times \frac{2.0}{\sqrt{16}} \leq m \leq 8.0 + 1.96 \times \frac{2.0}{\sqrt{16}}$$

$$\text{すなわち} \quad 7.02 \leq m \leq 8.98$$

したがって、その年のアユの平均体長は **7.0cm 以上 9.0cm 以下** と推定できる。

- (2) 平均額を m とする。

標本の大きさ 100 は大きいので、母標準偏差 σ のかわりに標本標準偏差 $s=500$ を用いる。

標本平均 $\bar{x}=1000$ であるから、 m に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$1000 - 1.96 \times \frac{500}{\sqrt{100}} \leq m \leq 1000 + 1.96 \times \frac{500}{\sqrt{100}} \quad \text{すなわち} \quad 902 \leq m \leq 1098$$

したがって、そのクレーンゲームで景品をとる平均額は **902 円以上 1098 円以下** と推定できる。

12

ある高校のバスケットボール部員の、フリースローの記録を無作為に 144 回分抽出して調べたとき、92 回成功していた。そのバスケットボール部員のフリースロー成功率を、信頼度 95% で区間推定せよ。

解答

標本比率 \bar{p} は $\frac{92}{144} \approx 0.64$ であるので、母比率 p の信頼度 95% の信頼区間は

$$0.64 - 1.96 \sqrt{\frac{0.64 \times 0.36}{144}} \leq p \leq 0.64 + 1.96 \sqrt{\frac{0.64 \times 0.36}{144}}$$

すなわち $0.5616 \leq p \leq 0.7184$

したがって、そのバスケットボール部員のフリースロー成功率は、**56%以上 72%以下** と推定できる。

13

「非常食を用意しているか？」など○、×で回答する10項目の防災アンケートを全国で実施したところ、○が平均7.00個、標準偏差1.00個であった。このアンケートをある市の無作為に抽出した400世帯で実施したところ、○は平均6.88個であった。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) ある市の結果は全国並みと判断してよいか。有意水準5%で検定せよ。また、有意水準1%で検定せよ。
- (2) ある市の市長は、この結果が全国より少ないかどうか、より強い関心がある。ある市の結果は全国より少ないと判断してよいか。有意水準1%で検定せよ。

解答

(1) 仮説を「結果は全国並みである。」とする。

○の平均を X 個とおくと、 X は正規分布
 $N(7.00, 1.00^2)$ に従うので、標本平均 \bar{X} は

$$N\left(7.00, \frac{1.00^2}{400}\right) \text{に従う。ここで、} Z = \frac{\bar{X} - 7.00}{\frac{1.00}{\sqrt{400}}}$$

おくと、確率変数 Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

有意水準5%の棄却域は $Z \leq -1.96, 1.96 \leq Z$ であるから

$$\bar{X} \leq 7.00 - 1.96 \times \frac{1.00}{\sqrt{400}}, \quad 7.00 + 1.96 \times \frac{1.00}{\sqrt{400}} \leq \bar{X}$$

すなわち $\bar{X} \leq 6.902, 7.098 \leq \bar{X}$

観測された標本平均 $\bar{x} = 6.88$ はこの区間に入るので、仮説は棄却される。

したがって、**有意水準5%では、ある市の結果は全国並みではないと判断できる。**

また、有意水準1%の棄却域は $Z \leq -2.58, 2.58 \leq Z$ であるから

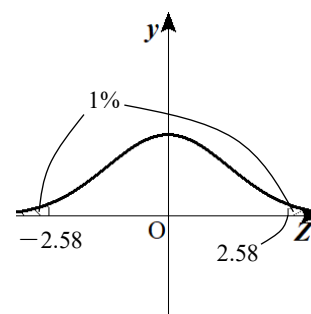
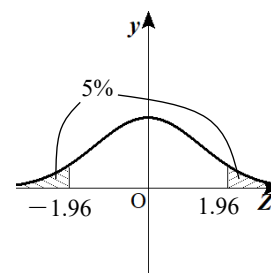
$$\bar{X} \leq 7.00 - 2.58 \times \frac{1.00}{\sqrt{400}}, \quad 7.00 + 2.58 \times \frac{1.00}{\sqrt{400}} \leq \bar{X}$$

すなわち $\bar{X} \leq 6.871, 7.129 \leq \bar{X}$

観測された標本平均 $\bar{x} = 6.88$ はこの区間に入らないので、仮説は棄却されない。

したがって、**有意水準1%では、ある市の結果は全国並みではないとはいえない。**

詳しくは
 対立仮説「結果は全国並みではない。」、
 帰無仮説「結果は全国並みである。」
 である。



(2) 仮説を「結果は全国以上である。」

とする。

○の平均を X 個とおくと、 X は正規分布 $N(7.00, 1.00^2)$ に従うときを調べればよい。

このとき、標本平均 \bar{X} は $N\left(7.00, \frac{1.00^2}{400}\right)$ に従う。

ここで、 $Z = \frac{\bar{X} - 7.00}{\frac{1.00}{\sqrt{400}}}$ とおくと、確率変数 Z は

標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

「結果は全国並みである。」の有意水準 1% の棄却域は $Z \leq -2.33$ であるから

$$\bar{X} \leq 7.00 - 2.33 \times \frac{1.00}{\sqrt{400}}$$

すなわち $\bar{X} \leq 6.8835$

観測された標本平均 $\bar{x} = 6.88$ はこの区間に入るので、仮説は棄却される。

したがって、有意水準 1% では、ある市の結果は全国より少ないと判断できる。

詳しくは

対立仮説「結果は全国より少ない。」、
帰無仮説「結果は全国以上である。」
である。

全国以上という仮説が棄却できるかどうかは、
全国並みとしたときの分布を調べればよい。

