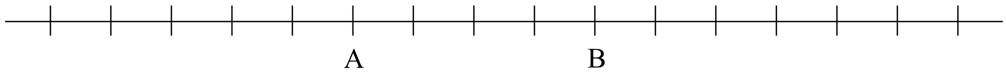
図形の性質

1

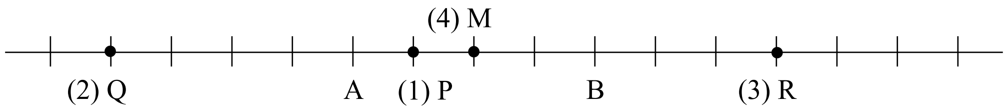
線分 AB に対して，次の点を図示せよ。

(1)　1 : 3 に内分する点 P　　(2)　1 : 2 に外分する点 Q

(3)　7 : 3 に外分する点 R　　(4)　中点 M

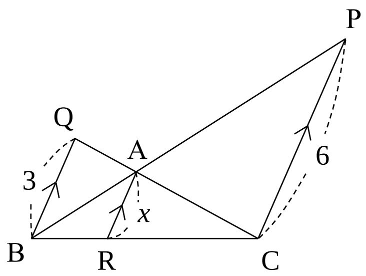


解答



2

右の図において，線分の長さ x を求めよ。
ただし，AR//BQ，AR//CP，BQ＝3，CP＝6
とする。



解答

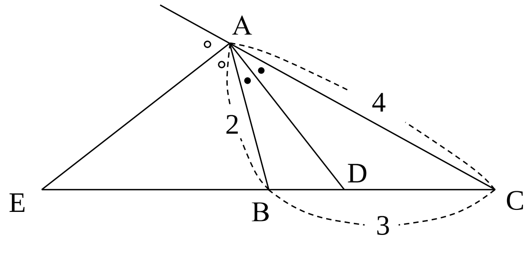
△ABQ∽△APC から，BA : PA＝3 : 6＝1 : 2 より　BA : BP＝1 : 3

これから，AR : CP＝1 : 3 より　x : 6＝1 : 3

よって　x＝**2**

3

AB＝2，BC＝3，CA＝4 である△ABC において，∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とし，∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を E とする。
線分 DE の長さを求めよ。

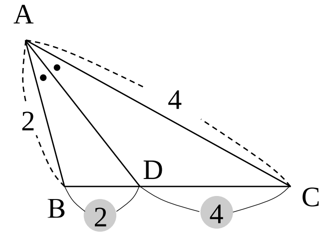


解答

線分 AD は$\angle BAC$の二等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC = 2 : 4 = 1 : 2$$

よって　$BD = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3} \times 3 = 1$

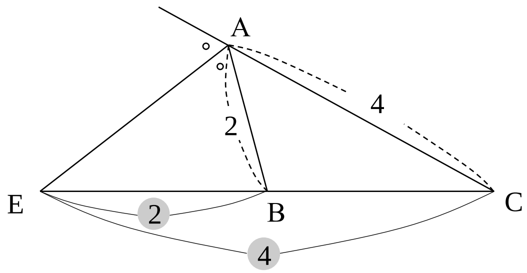


線分 AE は$\angle BAC$の外角の二等分線であるから

$$BE : EC = AB : AC = 2 : 4 = 1 : 2$$

よって　$EB : BC = 1 : 1$

したがって　$EB = BC = 3$

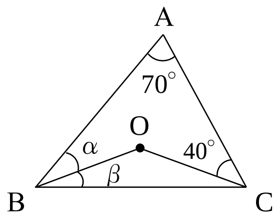


以上から　$DE = BD + EB = 1 + 3 =$ **4**

$\boxed{4}$

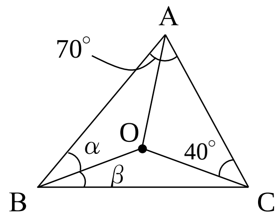
右の図において，点 O は$\triangle ABC$の外心である。

α，βを求めよ。



解答

右の図のように，2 点 A，O を結ぶ。



$\angle OCA = \angle OAC$ より　$\angle OAB = \angle A - \angle OAC = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$

$\angle OAB = \angle OBA$ より　$\boldsymbol{\alpha = 30^\circ}$

$\angle OBC = \angle OCB$，$\angle OCA + \angle A + \angle OBA + \angle OBC + \angle OCB = 180^\circ$ より

$$40^\circ + 70^\circ + 30^\circ + \beta + \beta = 180^\circ$$

よって　$\boldsymbol{\beta = 20^\circ}$

$\boxed{\beta \text{ の別解}}$

円周角の定理により　$\angle BOC = 2 \times \angle A = 2 \times 70^\circ = 140^\circ$

$\angle OBC = \angle OCB$，$\angle OBC + \angle OCB + \angle BOC = 180^\circ$ より

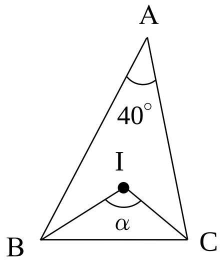
$$\beta + \beta + 140^\circ = 180^\circ$$

よって　$\beta = 20^\circ$

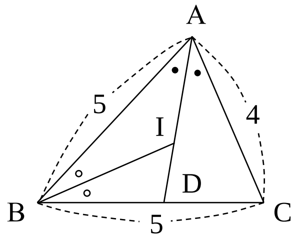
5

(1)　右の図において，点 I は△ABC の内心である。

α を求めよ。



(2)　AB＝5，BC＝5，CA＝4 である△ABC において，内心を I，直線 AI と辺 BC との交点を D とするとき，AI：ID を求めよ。



解答

(1)　∠IBA＝∠IBC＝x，∠ICA＝∠ICB＝y とおく。

∠A＋∠B＋∠C＝180° より

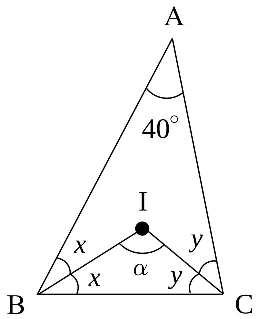
40°＋$2x$＋$2y$＝180°　　$\boxed{40° + 2(x+y) = 180°}$

よって　$x+y$＝70°

△IBC において　∠BIC＋∠IBC＋∠ICB＝180°

$\alpha + x + y = 180°$

したがって　**α＝110°**



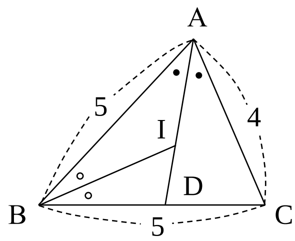
(2)　直線 AI は∠A の二等分線であるから

BD：DC＝AB：AC＝5：4

よって　$\mathrm{BD} = \dfrac{5}{9}\mathrm{BC} = \dfrac{5}{9} \times 5 = \dfrac{25}{9}$

また，直線 BI は∠B の二等分線であるから

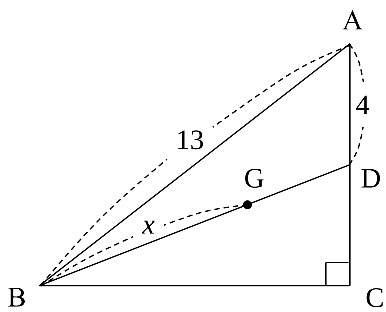
AI：ID＝BA：BD＝$5 : \dfrac{25}{9}$ **＝9：5**



6

右の図において，点 G は△ABC の重心，∠C＝90° である。

線分の長さ x を求めよ。



解答

AD＝DC より　DC＝4，AC＝8

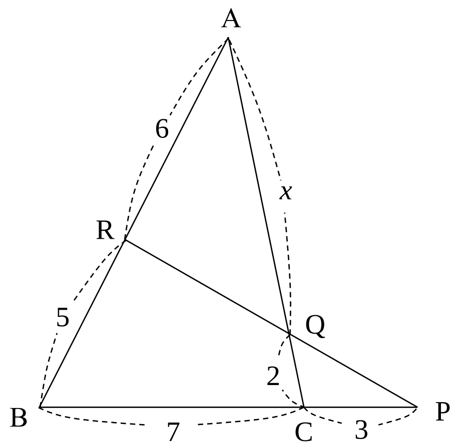
△ABC において，三平方の定理により　BC＝$\sqrt{13^2-8^2}=\sqrt{105}$

また，△DBC において，三平方の定理により　BD＝$\sqrt{(\sqrt{105})^2+4^2}=11$

BG：GD＝2：1 より　BG＝$\frac{2}{3}$BD　　よって　$x=\frac{2}{3}\times 11=\boldsymbol{\frac{22}{3}}$

$\boxed{7}$

右の図において，線分の長さ x を求めよ。



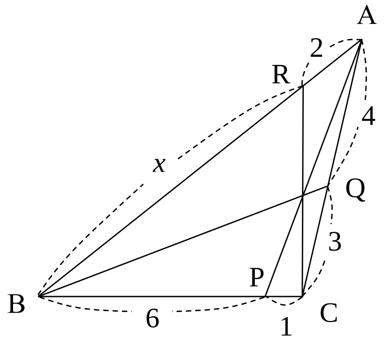
解答

メネラウスの定理により　$\frac{7+3}{3}\cdot\frac{2}{x}\cdot\frac{6}{5}=1$

よって　$\boldsymbol{x=8}$

$\boxed{8}$

右の図において，線分の長さ x を求めよ。



解答

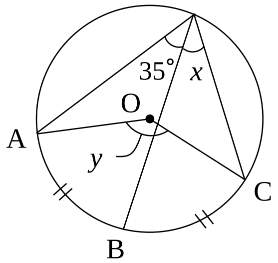
チェバの定理により　$\frac{6}{1}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{x}=1$

よって　$\boldsymbol{x=9}$

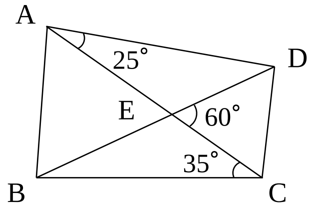
9

(1)　右の図において，x，y を求めよ。

ただし，点 O は円の中心，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ とする。



(2)　右の図において，4 点 A，B，C，D は同一円周上にあるといえるか。



解答

(1)　同じ弧に対する円周角の大きさは等しいから　$\boldsymbol{x=35^\circ}$

1 つの弧に対する中心角の大きさは，その弧に対する円周角の 2 倍であるから

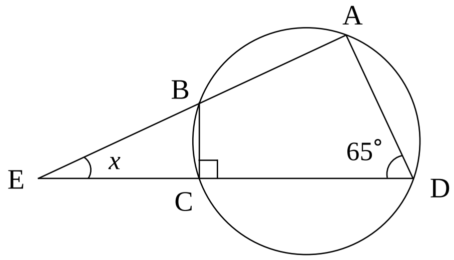
$\boldsymbol{y}=2\times(35^\circ+35^\circ)\boldsymbol{=140^\circ}$

(2)　△ADE の内角と外角の関係より，∠ADE＝60°－25°＝35° であるから　∠ACB＝∠ADB

よって，円周角の定理の逆により，**4 点 A，B，C，D は同一円周上にある。**

１０

右の図において，x を求めよ。

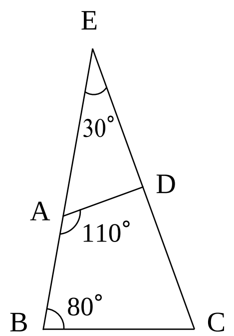


解答

∠BCD＝∠BAD＝90° であるから，△AED において　$90^\circ+65^\circ+x=180^\circ$ より　$\boldsymbol{x=25^\circ}$

１１

右の四角形 ABCD は，円に内接するか。



解答

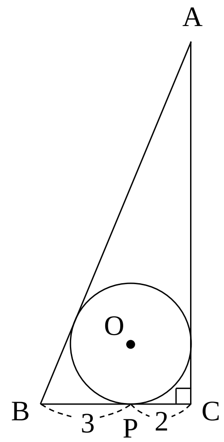
△EAD の内角と外角の関係から　∠ADE＝110°－30°＝80°

よって，1 つの外角が，それと隣り合う内角の対角に等しいから，**四角形 ABCD は円に内接する。**

１２

右の図において，円 O は∠C＝90° の直角三角形 ABC の内接円，点 P は辺 BC と円 O との接点である。

BP＝3，CP＝2 のとき，辺 AB，AC の長さを求めよ。



解答

円 O と辺 AC，AB の接点をそれぞれ Q，R とすると

BP＝BR＝3

CP＝CQ＝2

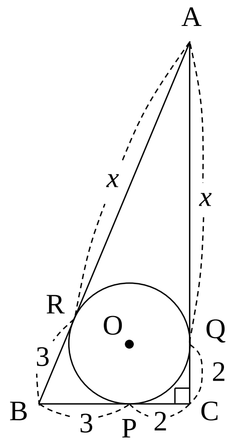
ここで，AQ＝AR＝x とおく。

△ABC において，三平方の定理により

$(x+2)^2+5^2=(x+3)^2$　　$x^2+4x+4+25=x^2+6x+9$

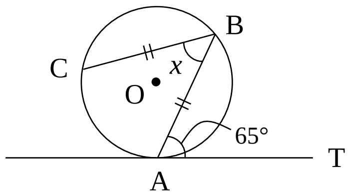
$-2x=-20$　　$x=10$

したがって　**AB＝13，AC＝12**



１３

右の図において，直線 AT は円 O の点 A における接線であり，BC＝BA である。x を求めよ。



解答

2 点 A，C を結ぶ。

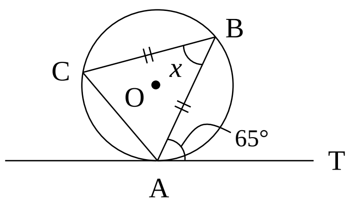
このとき，円の接線と弦の作る角の定理により　∠BCA＝65°

また，BC＝BA であるから　∠BAC＝65°

よって，△ABC において

∠BCA＋∠BAC＋∠ABC＝180°

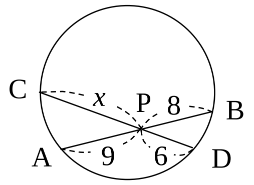
すなわち　65°＋65°＋x＝180°　　したがって　$\boldsymbol{x=50°}$



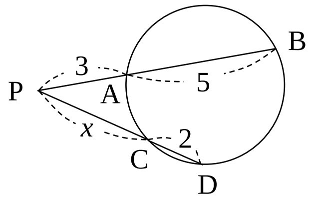
１４

次の図において，x の値を求めよ。ただし，(3)の直線 PT は接点を T とする円の接線である。

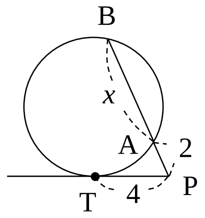
(1)



(2)



(3)



解答

(1)　PA・PB＝PC・PD から　$9\cdot 8=x\cdot 6$　　よって　$\boldsymbol{x=12}$

(2)　PA・PB＝PC・PD から　$3\cdot(3+5)=x\cdot(x+2)$

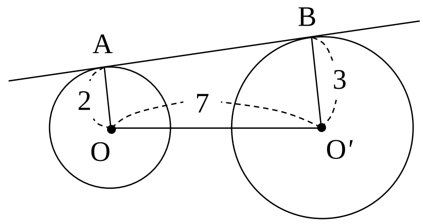
　よって　$x^2+2x-24=0$　　$(x-4)(x+6)=0$　　$x>0$ より　$\boldsymbol{x=4}$

(3)　PA・PB＝PT^2 から　$2(2+x)=4^2$　　よって　$\boldsymbol{x=6}$

１５

右の図において，直線 AB は 2 つの円 O，O′ の共通接線で，点 A，B が接点である。

線分 AB の長さを求めよ。



解答

点 O から線分 O′B に垂線 OH を引く。

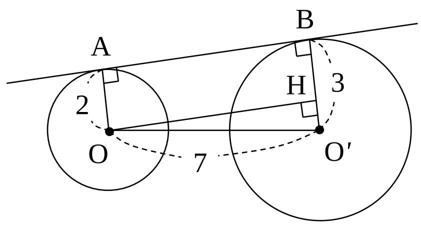
OA⊥AB，O′B⊥AB であるから，四角形 AOHB は長方形である。よって　AB＝OH，OA＝HB

また　O′H＝O′B－HB＝3－2＝1

直角三角形 OO′H において，三平方の定理により

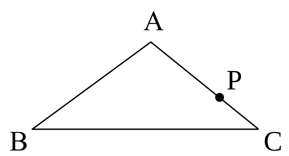
$$\mathrm{OH}=\sqrt{\mathrm{OO'}^2-\mathrm{O'H}^2}=\sqrt{7^2-1^2}=4\sqrt{3}$$

したがって　$\mathbf{AB}=\mathrm{OH}=\boldsymbol{4\sqrt{3}}$

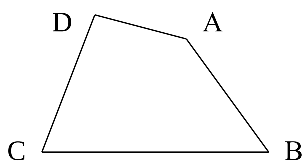


１６

(1)　△ABC と辺 AC 上の点 P が与えられている。
　点 P を通り，△ABC の面積を 2 等分する直線を作図せよ。

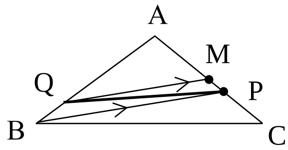


(2)　右の図のような四角形 ABCD がある。
　頂点 A を通り，四角形 ABCD の面積を 2 等分する直線を作図せよ。

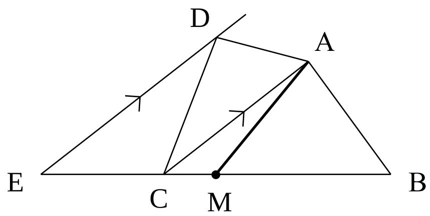


作図

(1) ①　辺 AC の中点 M をとる。
②　点 M を通り，直線 BP に平行な直線と，辺 AB との交点を Q とする。
③　点 P と点 Q を結んだ直線 PQ が求める直線である。

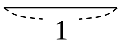


(2) ①　頂点 D を通り，直線 AC に平行な直線と直線 BC の交点を E とする。
②　線分 BE の中点を M とする。
③　頂点 A と点 M を結んだ直線 AM が求める直線である。



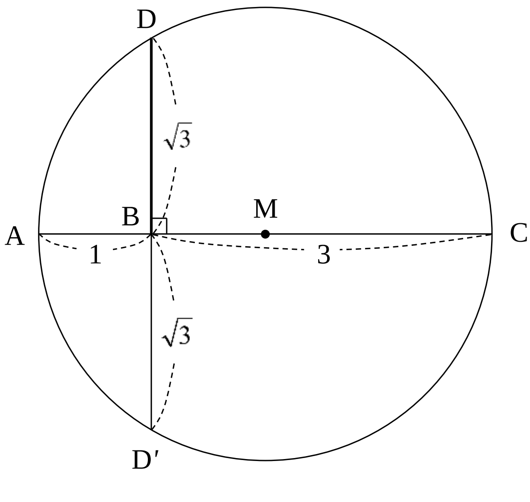
１７

長さ 1 の線分が与えられているとき，長さ $\sqrt{3}$ の線分を作図せよ。

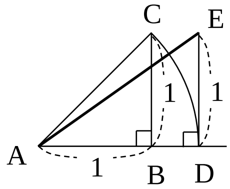


作図

①　同一直線上に AB＝1，BC＝3 となるような 3 点 A，B，C を，この順にとる。
②　線分 AC の中点を M とし，M を中心とする半径 AM の円をかく。
③　点 B を通り，直線 AC に垂直な直線と，②でかいた円との交点を D，D′ とする。このとき，AB・BC＝BD・BD′，BD＝BD′ より，線分 BD および BD′ の長さが $\sqrt{3}$ である。

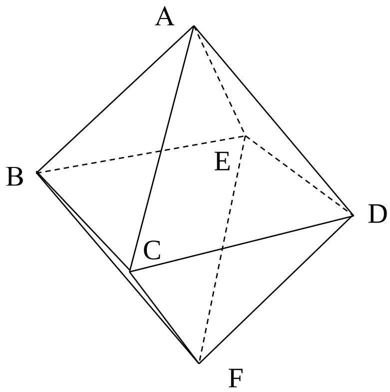


別解　①　AB＝BC＝1，∠ABC＝90° の直角二等辺三角形 ABC をかく。
②　半直線 AB 上に，AC＝AD となる点 D をとる。
③　DE＝1，∠ADE＝90° の直角三角形 ADE をかく。
このとき，AD＝$\sqrt{2}$ より，線分 AE の長さが $\sqrt{3}$ である。



１８

右の図のような 1 辺の長さが 1 である正八面体 ABCDEF において，2 直線 AB と EF のなす角を求めよ。



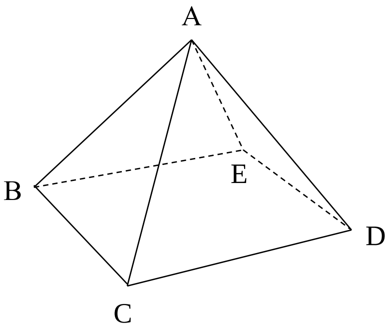
解答

AC//EF より，2 直線 AB と EF のなす角は，2 直線 AB と AC のなす角と同じである。

よって　**60°**

１９

右の図のような，1 辺の長さが 1 の正四角錐 A-BCDE において，直線 AB と平面 BCDE のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。



解答

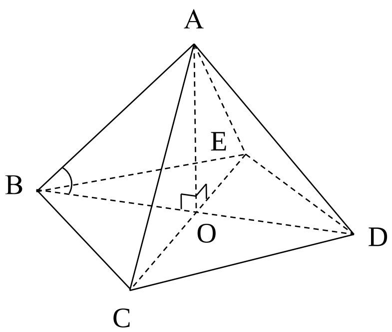
直線 AB は平面 BCDE と点 B で交わる。

対角線 BD と CE の交点を O とすると

$$\mathrm{AO}\perp\mathrm{BD},\ \mathrm{AO}\perp\mathrm{CE}$$

よって，点 A から平面 BCDE に引いた垂線は AO であるから

$$\theta=\angle\mathrm{ABO}$$



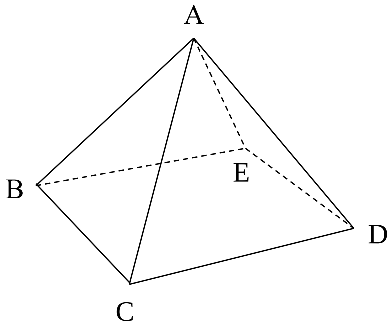
ここで　$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{BO}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

したがって　$\cos\theta=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

〈注意〉すなわち，$\angle\mathrm{ABO}=45^\circ$ である。

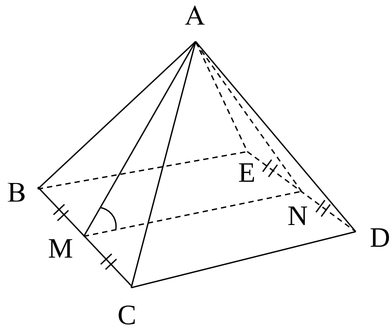
２０

1 辺の長さが 1 の正四角錐 A-BCDE において，
平面 ABC と平面 BCDE のなす角を θ とする
とき，$\cos\theta$ の値を求めよ。



解答

平面 ABC と平面 BCDE の交線は直線 BC である。
辺 BC の中点を M とする。
△ABC は AB＝AC の二等辺三角形と考えること
ができる。よって　AM⊥BC
辺 ED の中点を N とすると　BC⊥MN
したがって　$\theta=\angle\mathrm{AMN}$
ここで，$\mathrm{AM}=\mathrm{AN}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，MN＝1 であるから



$$\cos\theta=\frac{\mathrm{MA}^2+\mathrm{MN}^2-\mathrm{AN}^2}{2\mathrm{MA}\cdot\mathrm{MN}}=\frac{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

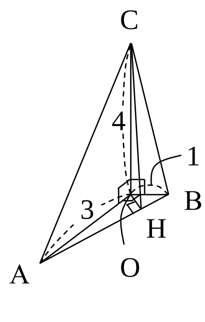
２１

互いに垂直な線分 OA，OB，OC があり，OA＝3，OB＝1，
OC＝4 である。点 O から線分 AB に垂線 OH を引くとき，
次の問いに答えよ。

(1)　線分 OH の長さを求めよ。

(2)　線分 CH の長さを求めよ。

(3)　△ABC の面積を求めよ。



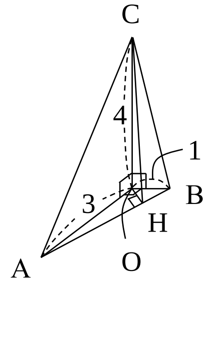
解答

(1)　△OAB の面積に着目すると

$$\frac{1}{2}\times\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}=\frac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{OH}\qquad\cdots\cdots①$$

OA＝3，OB＝1，$\mathrm{AB}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ であるから

①より　$\dfrac{1}{2}\times3\times1=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\mathrm{OH}$　　よって　$\mathrm{OH}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{10}}{10}}$



(2)　△OCH は∠COH＝90° の直角三角形であるから

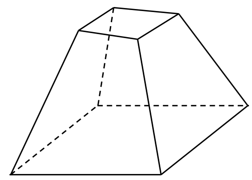
$$\mathrm{CH}=\sqrt{\mathrm{OC}^2+\mathrm{OH}^2}=\sqrt{4^2+\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2}=\frac{13}{\sqrt{10}}=\boldsymbol{\frac{13\sqrt{10}}{10}}$$

(3)　OC⊥平面 OAB，OH⊥AB であるから，三垂線の定理により　CH⊥AB

したがって，△ABC の面積は　$\frac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{CH}=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\frac{13}{\sqrt{10}}=\boldsymbol{\frac{13}{2}}$

２２

右の図のような多面体において，
オイラーの多面体定理が成り立つ
ことを確かめよ。



解答

頂点の数 v は　8 個

辺の数 e は　　12 本

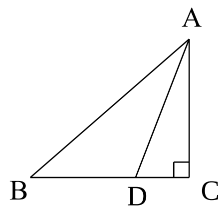
面の数 f は　　6 個

であるから　$v-e+f=8-12+6=2$　　よって，**オイラーの多面体定理は成り立つ。**

研究

次の問いに答えよ。

(1)　∠C＝90° である直角三角形 ABC において，
辺 BC 上の点を D とするとき，
AB＞AD
であることを証明せよ。



(2)　3 辺の長さが次のような三角形は存在するかどうかを調べよ。

①　3，5，7　　　　②　1，2，3

解答

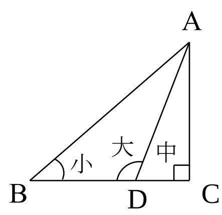
(1)　△ABC において，∠C＝90° であるから　∠B＜∠C　……①

∠ADB は△ADC の外角であるから　∠ADB＝∠ACD＋∠CAD

よって　∠ADB＞∠C　　……②

①，②から　∠ADB＞∠B

したがって，三角形の辺と角の大小関係により　AB＞AD



(2)　①　3＋5＞7，5＋7＞3，7＋3＞5
であるから，3 辺の長さが 3，5，7 の三角形は**存在する。**

②　3＝1＋2 であるから，3 辺の長さが 1，2，3 の三角形は**存在しない。**