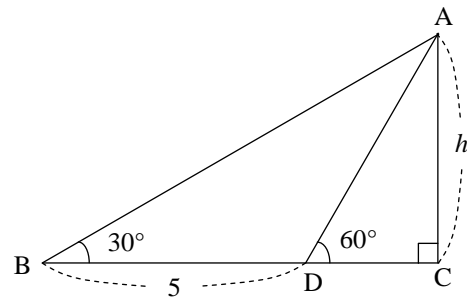


図形と計量

1

右の図の h を求めよ。



解答

$\triangle ADC$ において、 $DC : AC = 1 : \sqrt{3}$ から $DC : h = 1 : \sqrt{3}$ これから $DC = \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}h$

$\triangle ABC$ において、 $AC : BC = 1 : \sqrt{3}$ から $h : \left(5 + \frac{\sqrt{3}}{3}h\right) = 1 : \sqrt{3}$

これから $5 + \frac{\sqrt{3}}{3}h = \sqrt{3}h$ $\frac{2\sqrt{3}}{3}h = 5$ より $h = \frac{15}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

別解 $\triangle ABD$ が $AD = DB = 5$ の二等辺三角形であることを用いて、 $AD : AC = 2 : \sqrt{3}$ から求めることもできる。

2

次の三角比を求めよ。ただし、 $\sin 70^\circ = 0.9397$ 、 $\cos 70^\circ = 0.3420$ である。

(1) $\sin 20^\circ$

(2) $\sin 110^\circ$

(3) $\cos 160^\circ$

解答

(1) $90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$ であるから $\sin 20^\circ = \sin(90^\circ - 70^\circ) = \cos 70^\circ = \mathbf{0.3420}$

(2) $110^\circ = 180^\circ - 70^\circ$ であるから $\sin 110^\circ = \sin(180^\circ - 70^\circ) = \sin 70^\circ = \mathbf{0.9397}$

(3) $160^\circ = 180^\circ - 20^\circ$ であり、 $20^\circ = 90^\circ - 70^\circ$ であるから

$$\cos 160^\circ = \cos(180^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ = -\cos(90^\circ - 70^\circ) = -\sin 70^\circ = \mathbf{-0.9397}$$

3 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、次の問いに答えよ。

(1) $\tan \theta = \frac{1}{7}$ のとき、 $\sin \theta$ 、 $\cos \theta$ の値を求めよ。

(2) $\sin \theta = \frac{15}{17}$ のとき、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の値を求めよ。

解答

$$(1) \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \text{から} \quad \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{50}{49} \quad \cos^2 \theta = \frac{49}{50}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ, \quad \tan \theta = \frac{1}{7} > 0 \quad \text{であるから} \quad 0^\circ < \theta < 90^\circ \quad \text{よって} \quad \cos \theta > 0$$

$$\text{したがって} \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{49}{50}} = \frac{7\sqrt{2}}{10} \quad \text{また} \quad \sin \theta = \tan \theta \cdot \cos \theta = \frac{1}{7} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$(2) \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \text{から} \quad \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{15}{17}\right)^2 = \frac{64}{289}$$

(i) $\cos \theta > 0$ のとき

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{64}{289}} = \frac{8}{17} \quad \text{また} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{15}{17} \div \frac{8}{17} = \frac{15}{8}$$

(ii) $\cos \theta < 0$ のとき

$$\cos \theta = -\sqrt{\frac{64}{289}} = -\frac{8}{17} \quad \text{また} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{15}{17} \div \left(-\frac{8}{17}\right) = -\frac{15}{8}$$

$$(i), (ii) \text{から} \quad (\cos \theta, \tan \theta) = \left(\frac{8}{17}, \frac{15}{8}\right), \left(-\frac{8}{17}, -\frac{15}{8}\right)$$

4 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\sin \theta + \cos \theta = 0$ を満たす θ を求めよ。
 (2) $\sqrt{2} \sin \theta - 1 > 0$ を満たす θ の範囲を求めよ。

解答

(1) $\sin \theta + \cos \theta = 0$ から $\sin \theta = -\cos \theta$

(i) $\cos \theta = 0$ すなわち $\theta = 90^\circ$ のとき
 $1 + 0 \neq 0$ より不適。

(ii) $\cos \theta \neq 0$ すなわち $\theta \neq 90^\circ$ のとき

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -1 \quad \tan \theta = -1$$

右の図のように、直線 $x=1$ 上に
 点 $T(1, -1)$ をとり、直線 OT と
 半径 1 の半円の交点を P とすると、
 $\angle AOP = 135^\circ$ である。

したがって $\theta = 135^\circ$

(2) $\sqrt{2} \sin \theta - 1 > 0$ から $\sin \theta > \frac{1}{\sqrt{2}}$

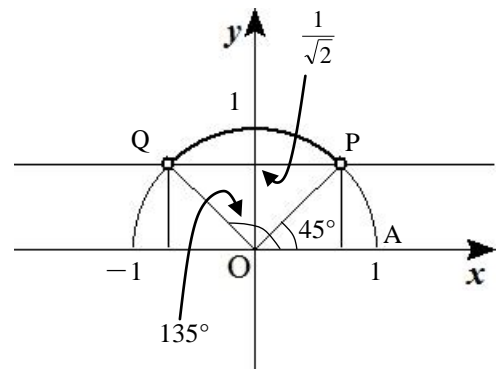
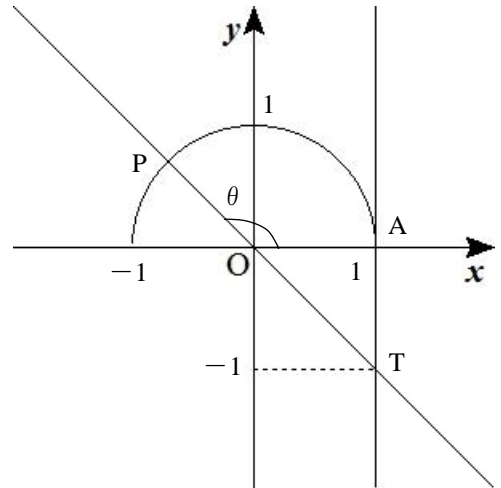
半径 1 の半円上で、 y 座標が $\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる

点を P, Q とすると

$$\angle AOP = 45^\circ, \quad \angle AOQ = 135^\circ$$

よって、右の図から $\sin \theta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす

θ の範囲は $45^\circ < \theta < 135^\circ$



5

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, $\sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{4}$ のとき, $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ の値を求めよ。

解答

$(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin \theta + \cos \theta) = \sin^3 \theta + \sin^2 \theta \cos \theta + \sin \theta \cos^2 \theta + \cos^3 \theta$ から

$\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = 1 \cdot (\sin \theta + \cos \theta) - \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta)$

$$= (1 - \sin \theta \cos \theta) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}(1 - \sin \theta \cos \theta)$$

また, $\sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{4}$ の両辺を 2 乗すると $\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{16}$

$$1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{16} \text{ から } 2\sin \theta \cos \theta = -\frac{15}{16} \text{ より } \sin \theta \cos \theta = -\frac{15}{32}$$

以上から $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = -\frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(-\frac{15}{32}\right) \right\} = -\frac{47}{128}$

別解 $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$ や

$\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)^3 - 3\sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta)$ を用いて求めてもよい。

6

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき, $y = -\sin^2 \theta - \cos \theta$ の最大値, 最小値を求めよ。また, そのときの θ も求めよ。

解答

$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ より $y = -\sin^2 \theta - \cos \theta = -(1 - \cos^2 \theta) - \cos \theta = \cos^2 \theta - \cos \theta - 1$

$\cos \theta = t$ とおくと, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ であるから $-1 \leq t \leq 1$

y を t を用いて表すと

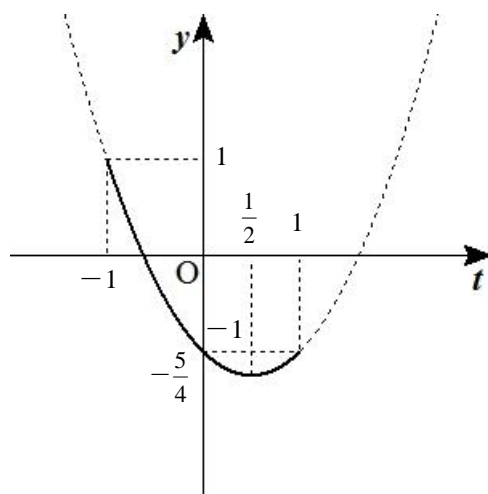
$$y = t^2 - t - 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

$t = \frac{1}{2}$ で最小値 $-\frac{5}{4}$, $t = -1$ で最大値 1 をとる。

$$t = \frac{1}{2} \text{ すなわち } \cos \theta = \frac{1}{2} \text{ を満たす } \theta \text{ は } \theta = 60^\circ$$

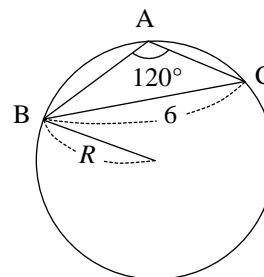
$$t = -1 \text{ すなわち } \cos \theta = -1 \text{ を満たす } \theta \text{ は } \theta = 180^\circ$$

よって, $\theta = 60^\circ$ のとき最小値 $-\frac{5}{4}$, $\theta = 180^\circ$ のとき最大値 1

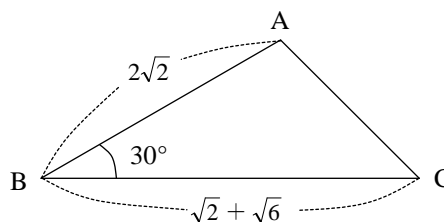


7 $\triangle ABC$ において、次のものを求めよ。

(1) $\angle A=120^\circ$, $a=6$ のときの外接円の半径 R



(2) $a=\sqrt{2} + \sqrt{6}$, $\angle B=30^\circ$, $c=2\sqrt{2}$ のときの $\angle A$, b , $\angle C$



解答

(1) 正弦定理により, $\frac{6}{\sin 120^\circ} = 2R$ から $\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$

$$\text{よって } R = \left(6 \div \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

(2) 余弦定理により

$$\begin{aligned} b^2 &= (\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{6}) \cdot 2\sqrt{2} \cdot \cos 30^\circ = 2 + 2\sqrt{12} + 6 + 8 - 4\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 16 + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 12 = 4 \end{aligned}$$

$b > 0$ から $b = 2$

正弦定理により, $\frac{2}{\sin 30^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin C}$ から $\frac{2}{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin C}$

$$\text{よって } \sin C = 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$2\sqrt{2} < \sqrt{2} + \sqrt{6}$ より, $\angle C < \angle A$ であるから $\angle C = 45^\circ$, $\angle A = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$

したがって $(\angle A, b, \angle C) = (105^\circ, 2, 45^\circ)$

8

$\cos A \sin C = \sin B$ が成り立つとき、 $\triangle ABC$ はどのような形の三角形か。

解答

与えられた式に $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$ をそれぞれ代入すると

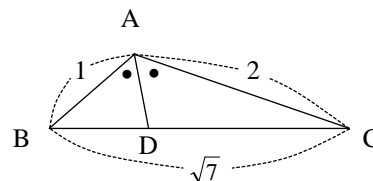
$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \cdot \frac{c}{2R} = \frac{b}{2R}$$

両辺に $4bR$ を掛けると $b^2+c^2-a^2=2b^2$ これから $a^2+b^2=c^2$ によって、 $\triangle ABC$ は $\angle C=90^\circ$ の直角三角形である。

9

次の空欄を埋めよ。

$\triangle ABC$ において、 $a=\sqrt{7}$, $b=2$, $c=1$ のとき、 $\cos A =$ (ア) ,
すなわち $\angle A =$ (イ) によって、 $\triangle ABC$ の面積は (ウ)
である。さらに、 $\angle A$ の二等分線と BC の交点を D としたとき、
 AD の長さは (エ) である。



解答

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{4+1-7}{2 \cdot 2 \cdot 1} = -\frac{1}{2} \quad 0^\circ \leq \angle A \leq 180^\circ \text{ であるから } \angle A = 120^\circ$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\triangle ABD + \triangle ACD = \triangle ABC$ であるので、それぞれ面積の公式から

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot AD \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot AD \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{これから } \frac{\sqrt{3}}{4} AD + \frac{\sqrt{3}}{2} AD = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{3\sqrt{3}}{4} AD = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{よって } AD = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

(ア) $-\frac{1}{2}$, (イ) 120° , (ウ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, (エ) $\frac{2}{3}$

10

△ABCにおいて、 $\angle A=45^\circ$ 、 $b=8$ 、 $c=\sqrt{2}$ のとき、内接円の半径 r を求めよ。

解答

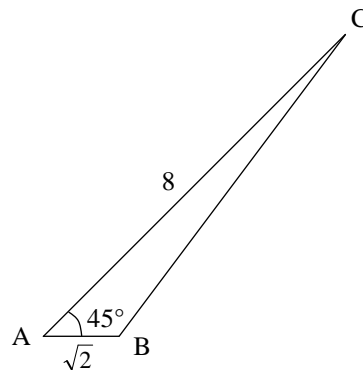
△ABCの面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\angle A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 4$$

また $a^2 = b^2 + c^2 - 2bcc\cos\angle A = 8^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ$

$$= 64 + 2 - 2 \cdot 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 50$$



$a > 0$ から $a = 5\sqrt{2}$ $S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$ にそれぞれの値を代入すると $4 = \frac{1}{2}r(5\sqrt{2} + 8 + \sqrt{2})$

$$4 = (4 + 3\sqrt{2})r \text{ から } r = \frac{4}{4 + 3\sqrt{2}} = \frac{4(4 - 3\sqrt{2})}{(4 + 3\sqrt{2})(4 - 3\sqrt{2})} = 6\sqrt{2} - 8$$

研究 1

円に内接する四角形 ABCD において、 $AB=6$ 、 $BC=7$ 、 $CD=2$ 、 $DA=3$ のとき、対角線 AC の長さ、四角形 ABCD の面積 S をそれぞれ求めよ。

解答

△ABC において、余弦定理により

$$AC^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos\angle ABC$$

$$= 85 - 84\cos\angle ABC \quad \dots\dots ①$$

△ADC において、余弦定理により

$$AC^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos\angle ADC$$

$$= 13 - 12\cos(180^\circ - \angle ABC)$$

$$= 13 + 12\cos\angle ABC \quad \dots\dots ②$$

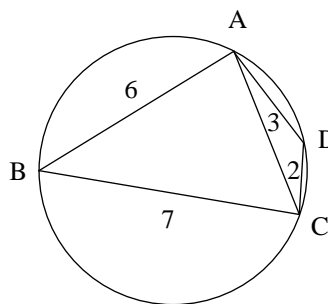
①、②から $85 - 84\cos\angle ABC = 13 + 12\cos\angle ABC$

これを解いて $\cos\angle ABC = \frac{3}{4}$ ①に代入すると $AC^2 = 85 - 84 \cdot \frac{3}{4} = 22$

$AC > 0$ から $AC = \sqrt{22}$

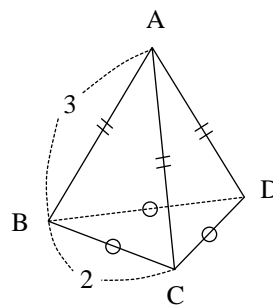
また $\sin\angle ABC = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ $\sin\angle ADC = \sin(180^\circ - \angle ABC) = \sin\angle ABC$ より

$$S = \triangle ABC + \triangle ADC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = 6\sqrt{7}$$



研究 2

右の図のような、正三角錐 ABCD の体積を求めよ。

**解答**

頂点 A から底面 $\triangle BCD$ に垂線 AH を引くと $\triangle ABH \equiv \triangle ACH \equiv \triangle ADH$

これから、 $BH = CH = DH$ であるので、点 H は $\triangle BCD$ の外心である。

よって、BH は $\triangle BCD$ の外接円の半径であるから

$$\frac{2}{\sin 60^\circ} = 2BH \quad \text{これから} \quad BH = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$\triangle ABH$ は直角三角形であるから、三平方の定理により

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{69}}{3}$$

$$\text{また} \quad \triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\text{以上から、正三角錐の体積は} \quad \frac{1}{3} \cdot \triangle BCD \cdot AH = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{69}}{3} = \frac{\sqrt{23}}{3}$$