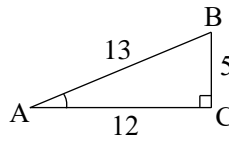


## 図形と計量

1

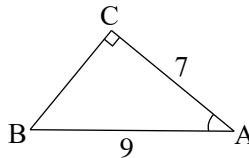
(1) 右の図の直角三角形 ABC において、

$\sin A$ ,  $\cos A$ ,  $\tan A$   
の値を求めよ。



(2) 右の図の直角三角形 ABC において、

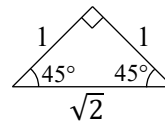
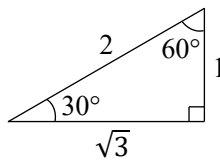
$\sin A$ ,  $\cos A$ ,  $\tan A$   
の値を求めよ。



(3) 右の図の直角三角形を参考に、

次の三角比の値を求めよ。

- ①  $\sin 45^\circ$
- ②  $\cos 60^\circ$
- ③  $\tan 30^\circ$

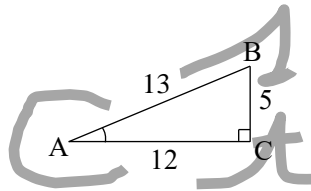


### 解答

(1)  $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{13}$ ,

$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{13}$ ,

$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{12}$



(2) 直角三角形 ABC を右のように向きを変える。

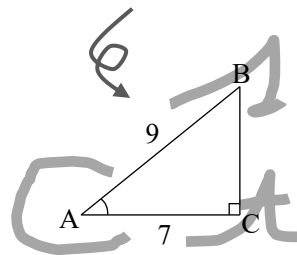
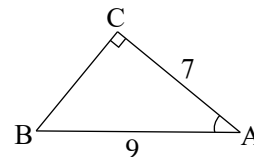
三平方の定理により  $BC^2 = 9^2 - 7^2 = 32$

$BC > 0$  であるから  $BC = 4\sqrt{2}$

よって  $\sin A = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ ,

$\cos A = \frac{7}{9}$ ,

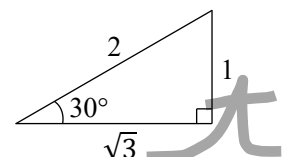
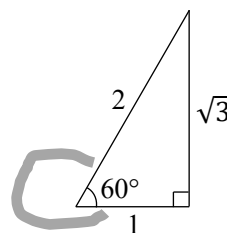
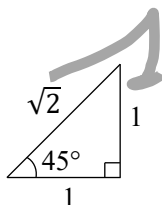
$\tan A = \frac{4\sqrt{2}}{7}$



(3) ①  $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

②  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

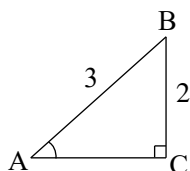
③  $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$



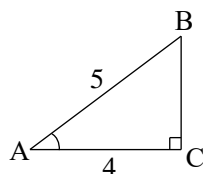
2

三角比の表を用いて、次の図の直角三角形 ABC における  $\angle A$  のおよその大きさ  $A$  を求めよ。

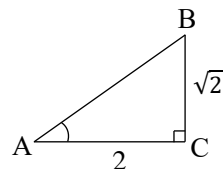
(1)



(2)



(3)



三角比の表

$A$	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$	$A$	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$
25°	0.4226	0.9063	0.4663	35°	0.5736	0.8192	0.7002
26°	0.4384	0.8988	0.4877	36°	0.5878	0.8090	0.7265
27°	0.4540	0.8910	0.5095	37°	0.6018	0.7986	0.7536
28°	0.4695	0.8829	0.5317	38°	0.6157	0.7880	0.7813
29°	0.4848	0.8746	0.5543	39°	0.6293	0.7771	0.8098
30°	0.5000	0.8660	0.5774	40°	0.6428	0.7660	0.8391
31°	0.5150	0.8572	0.6009	41°	0.6561	0.7547	0.8693
32°	0.5299	0.8480	0.6249	42°	0.6691	0.7431	0.9004
33°	0.5446	0.8387	0.6494	43°	0.6820	0.7314	0.9325
34°	0.5592	0.8290	0.6745	44°	0.6947	0.7193	0.9657
~				45°	0.7071	0.7071	1.0000
				~			

当該ファイルに関連のある部分を抜粋しています。

解答

(1)  $\sin A = \frac{2}{3} \approx 0.6667$

三角比の表から、 $\sin 41^\circ = 0.6561$ ,  $\sin 42^\circ = 0.6691$  より、 $\sin 42^\circ$  の値が 0.6667 に最も近いので

$A \approx 42^\circ$

(2)  $\cos A = \frac{4}{5} = 0.8$

三角比の表から、 $\cos 36^\circ = 0.8090$ ,  $\cos 37^\circ = 0.7986$  より、 $\cos 37^\circ$  の値が 0.8 に最も近いので  $A \approx 37^\circ$

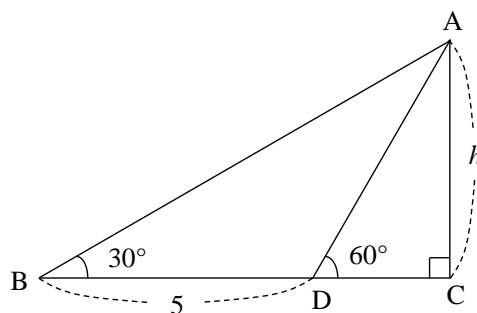
(3)  $\tan A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\sqrt{2} = 1.4142 \dots$  であるから  $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071$

三角比の表から、 $\tan 35^\circ = 0.7002$ ,  $\tan 36^\circ = 0.7265$  より、 $\tan 35^\circ$  の値が 0.7071 に最も近いので

$A \approx 35^\circ$

3

右の図の  $h$  を求めよ。



**解答**

$\triangle ADC$  において、 $DC : AC = 1 : \sqrt{3}$  から  $DC : h = 1 : \sqrt{3}$     これから  $DC = \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}h$

$\triangle ABC$  において、 $AC : BC = 1 : \sqrt{3}$  から  $h : \left(5 + \frac{\sqrt{3}}{3}h\right) = 1 : \sqrt{3}$

これから  $5 + \frac{\sqrt{3}}{3}h = \sqrt{3}h$      $\frac{2\sqrt{3}}{3}h = 5$  より  $h = \frac{15}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

**別解**  $\triangle ABD$  が  $AD = DB = 5$  の二等辺三角形であることを用いて、 $AD : AC = 2 : \sqrt{3}$  から求めることもできる。

4

$\theta$ は鋭角とする。

(1)  $\cos \theta = \frac{1}{3}$ のとき、 $\sin \theta$ と $\tan \theta$ の値を求めよ。

(2)  $\tan \theta = \frac{1}{7}$ のとき、 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ の値を求めよ。

**解答**

(1)  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  から  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$  これに、 $\cos \theta = \frac{1}{3}$ を代入すると

$$\sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \quad \theta \text{は鋭角であるから} \quad \sin \theta > 0$$

$$\text{よって} \quad \sin \theta = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{また} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \div \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times 3 = 2\sqrt{2}$$

(2)  $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$  に、 $\tan \theta = \frac{1}{7}$ を代入すると  $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \left(\frac{1}{7}\right)^2 = 1 + \frac{1}{49} = \frac{50}{49}$

$$\text{よって} \quad \cos^2 \theta = \frac{49}{50} \quad \theta \text{は鋭角であるから} \quad \cos \theta > 0 \quad \text{したがって} \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{49}{50}} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

$$\text{また、} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ から} \quad \sin \theta = \tan \theta \cdot \cos \theta = \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}$$

**別解** (1)  $\cos \theta = \frac{1}{3}$ より

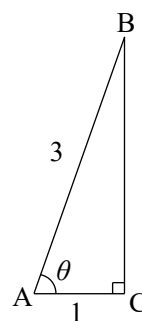
$$AB=3, AC=1, \angle C=90^\circ$$

の直角三角形ABCをかく。

$$\text{三平方の定理により} \quad BC^2 = AB^2 - AC^2 = 3^2 - 1^2 = 8$$

$$BC > 0 \text{ より} \quad BC = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{よって} \quad \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \tan \theta = \frac{2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2}$$



(2)  $\tan \theta = \frac{1}{7}$ より

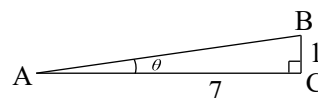
$$AC=7, BC=1, \angle C=90^\circ$$

の直角三角形ABCをかく。

$$\text{三平方の定理により} \quad AB^2 = AC^2 + BC^2 = 7^2 + 1^2 = 50$$

$$AB > 0 \text{ より} \quad AB = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\text{よって} \quad \sin \theta = \frac{1}{5\sqrt{2}}, \quad \cos \theta = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$



5

次の三角比を  $45^\circ$  より小さい角の三角比で表せ。

(1)  $\sin 80^\circ$

(2)  $\cos 50^\circ$

(3)  $\tan 64^\circ$

**解答**(1)  $80^\circ = 90^\circ - 10^\circ$  であり,  $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$  であるから

$$\sin 80^\circ = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \mathbf{\cos 10^\circ}$$

(2)  $50^\circ = 90^\circ - 40^\circ$  であり,  $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$  であるから

$$\cos 50^\circ = \cos(90^\circ - 40^\circ) = \mathbf{\sin 40^\circ}$$

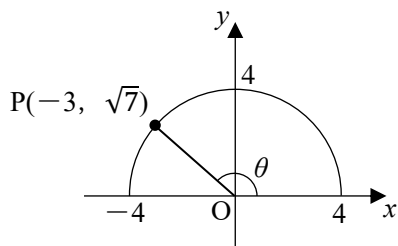
(3)  $64^\circ = 90^\circ - 26^\circ$  であり,  $\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}$  であるから

$$\tan 64^\circ = \tan(90^\circ - 26^\circ) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\tan 26^\circ}}$$

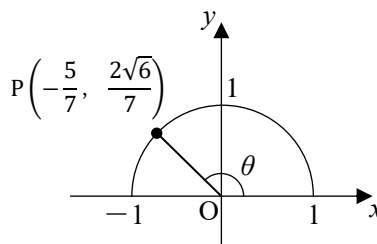
6

(1) 次の図において、 $\sin\theta$ ,  $\cos\theta$ ,  $\tan\theta$  の値を求めよ。

①



②



(2) 次の三角比の値を求めよ。

①  $\sin 120^\circ$

②  $\cos 135^\circ$

③  $\tan 150^\circ$

### 解答

(1) ①  $r=4$  であり、点 P の座標は  $(-3, \sqrt{7})$  であるから

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}, \quad \cos\theta = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}, \quad \tan\theta = \frac{\sqrt{7}}{-3} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

②  $r=1$  であり、点 P の座標は  $(-\frac{5}{7}, \frac{2\sqrt{6}}{7})$  であるから

$$\sin\theta = \frac{2\sqrt{6}}{7} = \frac{2\sqrt{6}}{7}, \quad \cos\theta = \frac{-5}{7} = -\frac{5}{7}, \quad \tan\theta = \frac{2\sqrt{6}}{-5} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

(2) ①  $\theta=120^\circ$  のとき、

右の図のように点 P をとることができる。

$$\text{よって } \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

②  $\theta=135^\circ$  のとき、

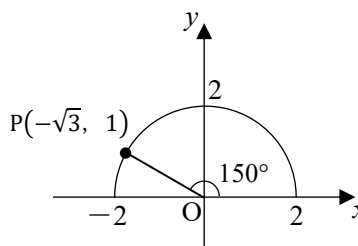
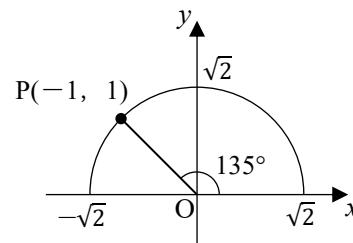
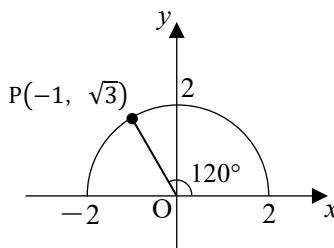
右の図のように点 P をとることができる。

$$\text{よって } \cos 135^\circ = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

③  $\theta=150^\circ$  のとき、

右の図のように点 P をとることができる。

$$\text{よって } \tan 150^\circ = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$



7

次の三角比を  $90^\circ$  より小さい角の三角比で表せ。

(1)  $\sin 160^\circ$

(2)  $\cos 105^\circ$

(3)  $\tan 128^\circ$

**解答**

(1)  $160^\circ = 180^\circ - 20^\circ$  であり、 $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$  であるから

$$\sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ$$

(2)  $105^\circ = 180^\circ - 75^\circ$  であり、 $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$  であるから

$$\cos 105^\circ = \cos(180^\circ - 75^\circ) = -\cos 75^\circ$$

(3)  $128^\circ = 180^\circ - 52^\circ$  であり、 $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$  であるから

$$\tan 128^\circ = \tan(180^\circ - 52^\circ) = -\tan 52^\circ$$

8

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき、次の等式を満たす  $\theta$  を求めよ。

(1)  $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)  $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

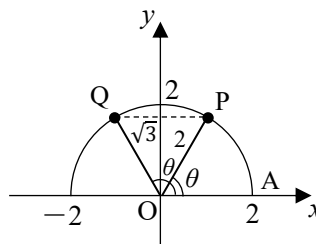
(3)  $\tan \theta = -\sqrt{3}$

**解答**

(1)  $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$  のとき、右の図のように

半径 2 の半円上に点 P, Q をとると、  
求める  $\theta$  は  $\angle AOP$ ,  $\angle AOQ$  である。

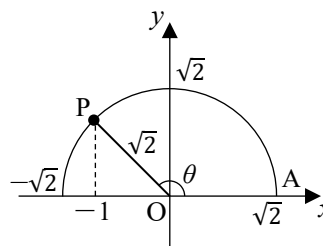
よって  $\theta = 60^\circ, 120^\circ$



(2)  $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  のとき、右の図のように

半径  $\sqrt{2}$  の半円上に点 P をとると、  
求める  $\theta$  は  $\angle AOP$  である。

よって  $\theta = 135^\circ$

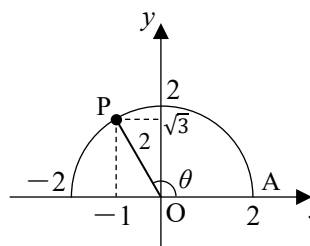


(3)  $\tan \theta = -\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{-1}$  であり、

$(-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 2^2$  であるから、

右の図のように半径 2 の半円上に点 P をとると、  
求める  $\theta$  は  $\angle AOP$  である。

よって  $\theta = 120^\circ$





9

 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  とする。(1)  $\sin \theta = \frac{15}{17}$  のとき,  $\cos \theta$  と  $\tan \theta$  の値を求めよ。(2)  $\tan \theta = -\frac{2}{11}$  のとき,  $\sin \theta$  と  $\cos \theta$  の値を求めよ。**解答**(1)  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  から  $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$  これに,  $\sin \theta = \frac{15}{17}$  を代入すると

$$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{15}{17}\right)^2 = 1 - \frac{225}{289} = \frac{64}{289}$$

(i)  $\cos \theta > 0$  のとき

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{64}{289}} = \frac{8}{17} \quad \text{また} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{15}{17} \div \frac{8}{17} = \frac{15}{17} \times \frac{17}{8} = \frac{15}{8}$$

(ii)  $\cos \theta < 0$  のとき

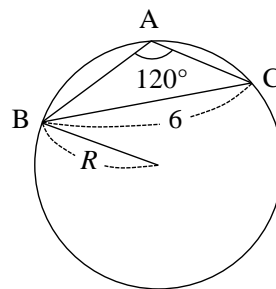
$$\cos \theta = -\sqrt{\frac{64}{289}} = -\frac{8}{17} \quad \text{また} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{15}{17} \div \left(-\frac{8}{17}\right) = \frac{15}{17} \times \left(-\frac{17}{8}\right) = -\frac{15}{8}$$

(2)  $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$  に,  $\tan \theta = -\frac{2}{11}$  を代入すると  $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \left(-\frac{2}{11}\right)^2 = 1 + \frac{4}{121} = \frac{125}{121}$ よって  $\cos^2 \theta = \frac{121}{125}$   $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ,  $\tan \theta = -\frac{2}{11} < 0$  であるから  $90^\circ < \theta < 180^\circ$ これから  $\cos \theta < 0$  したがって  $\cos \theta = -\sqrt{\frac{121}{125}} = -\frac{11}{5\sqrt{5}}$ また,  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$  から  $\sin \theta = \tan \theta \cdot \cos \theta = \left(-\frac{2}{11}\right) \cdot \left(-\frac{11}{5\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{5\sqrt{5}}$

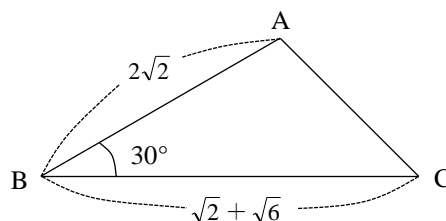
10

△ABCにおいて、辺BC, CA, ABの長さをそれぞれ $a, b, c$ ,  
 $\angle A, \angle B, \angle C$ の大きさをそれぞれ $A, B, C$ で表すことにする。

(1)  $A=120^\circ, a=6$ のときの外接円の半径 $R$



(2)  $a=\sqrt{2}+\sqrt{6}, B=30^\circ, c=2\sqrt{2}$ のときの $A, b, C$



### 解答

(1) 正弦定理により,  $\frac{6}{\sin 120^\circ} = 2R$ から  $\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$

$$\text{よって } R = \left(6 \div \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

(2) 余弦定理により

$$\begin{aligned} b^2 &= (\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{6}) \cdot 2\sqrt{2} \cdot \cos 30^\circ = 2 + 2\sqrt{12} + 6 + 8 - 4\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 16 + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 12 = 4 \end{aligned}$$

$b > 0$ から  $b = 2$

正弦定理により,  $\frac{2}{\sin 30^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin C}$ から  $\frac{2}{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin C}$

$$\text{よって } \sin C = 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$2\sqrt{2} < \sqrt{2} + \sqrt{6}$ より,  $C < A$ であるから  $C = 45^\circ$ ,  $A = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$

したがって  $(A, b, C) = (105^\circ, 2, 45^\circ)$

11

$\cos A \sin C = \sin B$  が成り立つとき、 $\triangle ABC$  はどのような形の三角形か。

**解答**

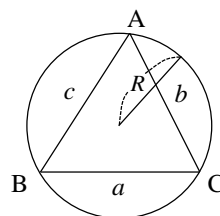
与えられた式に  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ,  $\sin C = \frac{c}{2R}$ ,  $\sin B = \frac{b}{2R}$

をそれぞれ代入すると

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{c}{2R} = \frac{b}{2R}$$

両辺に  $4bR$  を掛けると  $b^2 + c^2 - a^2 = 2b^2$  これから  $a^2 + b^2 = c^2$

よって、 $\triangle ABC$  は  $\angle C = 90^\circ$  の直角三角形 である。



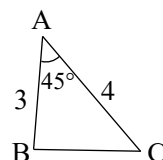
12

次の△ABC の面積を求めよ。

- (1)  $AB=3$ ,  $AC=4$ ,  $A=45^\circ$   
 (2)  $AB=3$ ,  $AC=5$ ,  $BC=7$

## 解答

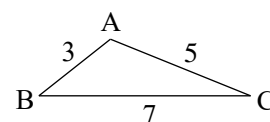
$$(1) S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$



$$(2) \text{ 余弦定理により } \cos A = \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{25 + 9 - 49}{30} = -\frac{1}{2}$$

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ,  $0^\circ < A < 180^\circ$  のとき,  $\sin A > 0$  から

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\text{よって } S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

**別解** ヘロンの公式を用いる。

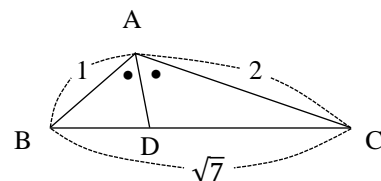
$$s = \frac{a + b + c}{2} = \frac{7 + 5 + 3}{2} = \frac{15}{2} \text{ であるから}$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{\frac{15}{2} \left(\frac{15}{2} - 7\right) \left(\frac{15}{2} - 5\right) \left(\frac{15}{2} - 3\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{15}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{9}{2}} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

13 次の空欄を埋めよ。

△ABCにおいて、 $a=\sqrt{7}$ 、 $b=2$ 、 $c=1$ のとき、 $\cos A=(ア)$ 、  
 すなわち  $\angle A=(イ)$  によって、△ABCの面積は(ウ)  
 である。さらに、 $\angle A$ の二等分線とBCの交点をDとしたとき、  
 ADの長さは(エ)である。



**解答**

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4 + 1 - 7}{2 \cdot 2 \cdot 1} = -\frac{1}{2} \quad 0^\circ \leq \angle A \leq 180^\circ \text{ であるから } \angle A = 120^\circ$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

△ABD+△ACD=△ABC であるので、面積の公式から

$$\frac{1}{2} \cdot AD \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot AD \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

これから  $\frac{\sqrt{3}}{4}AD + \frac{\sqrt{3}}{2}AD = \frac{\sqrt{3}}{2}$        $\frac{3\sqrt{3}}{4}AD = \frac{\sqrt{3}}{2}$       よって  $AD = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$

(ア)  $-\frac{1}{2}$ ,      (イ)  $120^\circ$ ,      (ウ)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,      (エ)  $\frac{2}{3}$

14

△ABCにおいて、 $A=45^\circ$ 、 $b=8$ 、 $c=\sqrt{2}$ のとき、内接円の半径 $r$ を求めよ。

**解答**

△ABCの面積を $S$ とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 4 \end{aligned}$$

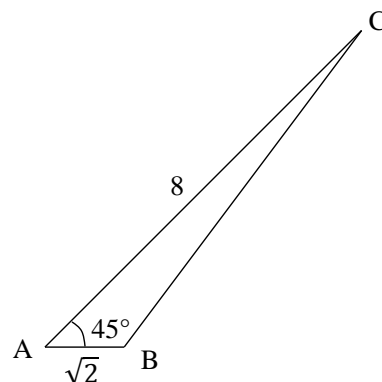
また  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 8^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ$

$$= 64 + 2 - 2 \cdot 8 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 50$$

$a > 0$  から  $a = 5\sqrt{2}$        $S = \frac{1}{2}r(a + b + c)$  にそれぞれの

値を代入すると  $4 = \frac{1}{2}r(5\sqrt{2} + 8 + \sqrt{2})$

$$4 = (4 + 3\sqrt{2})r \text{ から } r = \frac{4}{4 + 3\sqrt{2}} = \frac{4(4 - 3\sqrt{2})}{(4 + 3\sqrt{2})(4 - 3\sqrt{2})} = 6\sqrt{2} - 8$$



**研究 1**

円に内接する四角形 ABCD において、 $AB=6$ 、 $BC=7$ 、 $CD=2$ 、 $DA=3$  のとき、対角線 AC の長さ、四角形 ABCD の面積  $S$  をそれぞれ求めよ。

**解答**

$\triangle ABC$  において、余弦定理により

$$\begin{aligned} AC^2 &= 6^2 + 7^2 - 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cos \angle ABC \\ &= 85 - 84 \cos \angle ABC \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\triangle ADC$  において、余弦定理により

$$\begin{aligned} AC^2 &= 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos \angle ADC \\ &= 13 - 12 \cos(180^\circ - \angle ABC) \\ &= 13 + 12 \cos \angle ABC \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

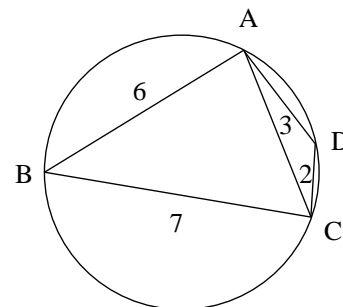
①, ②から  $85 - 84 \cos \angle ABC = 13 + 12 \cos \angle ABC$

これを解いて  $\cos \angle ABC = \frac{3}{4}$       ①に代入すると  $AC^2 = 85 - 84 \cdot \frac{3}{4} = 22$

$AC > 0$  から  $AC = \sqrt{22}$

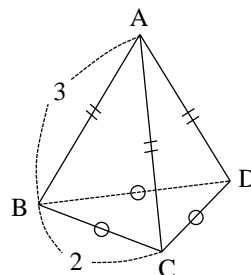
また  $\sin \angle ABC = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$        $\sin \angle ADC = \sin(180^\circ - \angle ABC) = \sin \angle ABC$  より

$$S = \triangle ABC + \triangle ADC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = 6\sqrt{7}$$



**研究 2**

右の図のような、正三角錐 ABCD の体積を求めよ。



**解答**

頂点 A から底面  $\triangle BCD$  に垂線 AH を引くと  $\triangle ABH \cong \triangle ACH \cong \triangle ADH$

これから、 $BH = CH = DH$  であるので、点 H は  $\triangle BCD$  の外心である。

よって、BH は  $\triangle BCD$  の外接円の半径であるから

$$\frac{2}{\sin 60^\circ} = 2BH \quad \text{これから} \quad BH = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$\triangle ABH$  は直角三角形であるから、三平方の定理により

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{69}}{3}$$

$$\text{また} \quad \triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\text{以上から、正三角錐の体積は} \quad \frac{1}{3} \cdot \triangle BCD \cdot AH = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{69}}{3} = \frac{\sqrt{23}}{3}$$

$\angle AHB = \angle AHC = \angle AHD$ $= 90^\circ,$ $AB = AC = AD,$ $AH$ は共通
--

