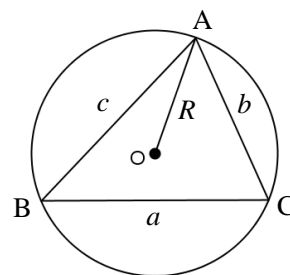


正弦定理

△ABCにおいて、頂点A, B, Cにおける角の大きさをA, B, C, 其对辺BC, CA, ABの長さをそれぞれa, b, c, またその外接円の半径をRとすると、次の等式が成り立つ。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



証明

$\frac{a}{\sin A} = 2R$ を証明する。△ABCの外接円の中心をOとする。

(i) $A=90^\circ$ のとき、BCは円Oの直径であるから

$$a=2R, \quad \sin A=1 \text{ より}$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

が成り立つ。

(ii) $A < 90^\circ$ のとき、右の図のように直線BOと円Oとの交点で点Bでない点をDとすると、円周角の定理により

$$A = \angle BDC$$

また、 $\angle BCD=90^\circ$, $BD=2R$ より

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

が成り立つ。

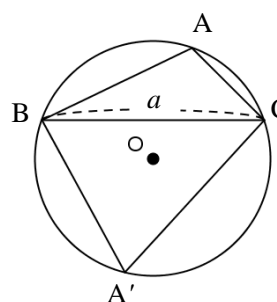
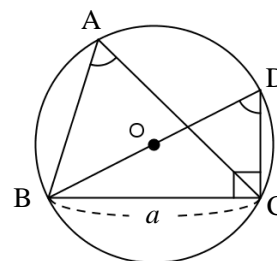
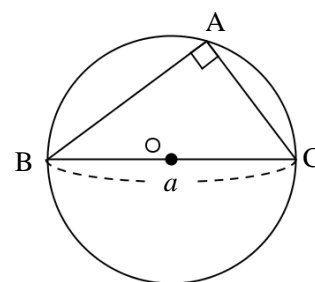
(iii) $A > 90^\circ$ のとき、円O上で、弧BACの上でない点A'をとり、 $\angle BA'C=A'$ とおけば $\sin A = \sin(180^\circ - A') = \sin A'$ $A' < 90^\circ$ であるから、(ii)より

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\sin A'} = 2R$$

が成り立つ。

$\frac{b}{\sin B} = 2R$, $\frac{c}{\sin C} = 2R$ についても同様に証明できる。したがって、△ABCにおいて

等式 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ が成り立つ。



ポイント 円周角の定理により、注目している角と同じ角を、円の中心を通るように作る。直径が2Rであることと、新しくできた三角形が直角三角形であることから等式が証明できる。